

Ivane Javakishvili Tbilisi State University  
Faculty of exact and natural sciences

Doctoral program in physics

**Alexandre Gurchumelia**

**Applications of Split Octonions for Some  
Problems of Field Theory**

Dissertation submitted for obtaining PhD in physics

Scientific supervisor: Associate professor **Merab Gogberashvili**

Candidate of Sciences in Physics and Mathematics

Tbilisi

2023

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი  
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

დოქტორანტურის საგანმანათლებლო პროგრამა ფიზიკა

**ალექსანდრე ღურჭუმელია**

**სპლიტ ოქტონიონების გამოყენება ველის  
თეორიის ზოგიერთი ამოცანისათვის**

ფიზიკის დოქტორის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად  
წარმოდგენილი დისერტაცია

სამეცნიერო ხელმძღვანელი: ასოცირებული პროფესორი **მერაბ გოგბერაშვილი**  
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა კანდიდატი

თბილისი

2023 წელი

I express my gratitude for the joint grant from **Volkswagen Foundation** (Ref. 93 562) and **Shota Rustaveli National Science Foundation of Georgia** (#04/48) received as a part of **Regional Doctoral Program in Theoretical and Experimental Particle Physics**, which helped me significantly during my doctoral studies.

გამოვხატავ მადლიერებას თეორიული და ნაწილაკების ექსპერიმენტული ფიზიკის რეგიონული სადოქტორო პროგრამის (Regional Doctoral Program in Theoretical and Experimental Particle Physics) ფარგლებში მიღებული ფოლკსვაგენის (Volkswagen Foundation Ref. 93 562) და შოთა რუსთაველის საქართველოს ეროვნული სამეცნიერო ფონდის (#04/48) ერთობლივი გრანტისთვის, რომელიც მნიშვნელოვნად მეხმარებოდა დოქტორანტურაში სწავლის განმავლობაში.



## Abstract

In this PhD dissertation split octonionic fields and their symmetries are studied. The property of  $(4 + 4)$ -space known as triality, which manifests as equivalence of the 8-dimensional chiral spinors and the vector, is explored in the context of physics. Split octonionic representations of  $SO(4, 4)$  and  $Spin(4, 4)$  groups are found and are compared to the Clifford algebraic matrix representations. By utilizing group invariant forms, Lagrangian that generalizes Dirac and Maxwell theories is constructed, extending these fundamental theories onto exceptional mathematical structures. In addition, the dissertation investigates automorphism group of split octonion algebra, the noncompact  $G_2$ , corresponding Lie algebra, its Casimir operator and geometrical application of these algebraic structures in physics. These results contribute to the development of a theoretical framework for split octonionic field theories and open up new avenues for exploration of non-associativity in physics.

## ანოტაცია

სადოქტორო დისერტაციაში შესწავლილია სპლიტ ოქტონიონური ველები და მათი სიმეტრიები. ფიზიკის კონტექსტში გამოკვლეულია  $(4 + 4)$ -სივრცის ტრიალობის თვისება, რაც გამოიხატება 8-განზომილებიანი კირალური სპინორების და ვექტორის ექვივალენტობაში. ნაპოვნია  $SO(4, 4)$  და  $Spin(4, 4)$  ჯგუფების სპლიტ ოქტონიონური წარმოდგენები და შედარებულია კლიფორდის ალგებრულ მატრიცულ წარმოდგენასთან. ჯგუფის ინვარიანტული ფორმების გამოყენებით აგებულია ლაგრანჟიანი, რომელიც ახდენს დირაკის და მაქსველის თეორიებს განზოგადებას და ამ ფუნდამენტურ თეორიებს ათავსებს განსაკუთრებულ მათემატიკურ სტრუქტურებში. გარდა ამისა, დისერტაციაში გამოკვლეულია სპლიტ ოქტონიონთა ალგებრის ავტომორფიზმის ჯგუფი, არაკომპაქტური  $G_2$ , შესაბამისი ლის ალგებრა, მისი კაზიმირის ოპერატორი და ამ ალგებრული სტრუქტურების გეომეტრიული გამოყენება ფიზიკაში. მიღებული შედეგები ხელს უწყობს სპლიტ ოქტონიონური ველებისთვის თეორიული ჩარჩოს შემუშავებას და ხსნის ახალ გზებს ფიზიკაში არასოციაციურობის შესასწავლად.

# შინაარსი

<b>1 შესავალი</b>	1
1.1 საკვლევი თემა და მისი მნიშვნელობა . . . . .	1
1.2 კვლევის მიზნები და ამოცანები . . . . .	5
<b>2 ლიტერატურის მიმოხილვა</b>	7
2.1 ზოგადი მიმოხილვა . . . . .	7
2.2 კაზიმირის ოპერატორი და პუანკარეს ჯგუფი . . . . .	8
2.3 კელი-დიქსონის კონსტრუქციები ფიზიკაში . . . . .	10
2.4 კლიფორდის ალგებრები და სპინორები ფიზიკაში . . . . .	12
<b>3 ორიგინალური შედეგები</b>	26
3.1 არაკომპაქტური $G_2$ ჯგუფი . . . . .	26
3.2 კლიფორდის ალგებრა $Cl_{4,4}(\mathbb{R})$ . . . . .	39
3.3 სპლიტ ოქტონიონური რიცხვები $\mathbb{O}'$ . . . . .	49
3.4 სპლიტ ოქტონიონური ველის თეორიები . . . . .	55
3.5 დირაკის და მაქსველის განტოლებები . . . . .	58
<b>4 დასკვნა</b>	63

# თავი 1

## შესავალი

### 1.1 საკვლევი თემა და მისი მნიშვნელობა

ელემენტარული ნაწილაკების სტანდარტული მოდელი, რომელიც საბოლოო სახით XX საუკუნის 70-იან წლებში ჩამოყალიბდა, ყველაზე წარმატებული თეორი-  
აა ნაწილაკების ფიზიკაში. იგი ახდენს ყველა ცნობილი ნაწილაკის კლასიფიკაცი-  
ას და აღწერს მათ შორის ბუნებაში ოთხი ცნობილი ურთიერთქმედების ძალიდან  
სამს: ელექტრომაგნიტურ, სუსტ და ძლიერ ბირთვულ ძალებს. თუმცა აქვე ჩანს მისი  
უდიდესი ნაკლი, ის არ მოიცავს გრავიტაციულ ურთიერთქმედებას იმის გამო, რომ  
ვერ ხერხდება ზოგადი ფარდობითობის თეორიის დაკვანტვა. მეორე დიდი ამოუხ-  
სნელი ამოცანა რაც სტანდარტულ მოდელს და გრავიტაციას ეხება არის ე.წ. იერ-  
არქიის პრობლემა. ეს პრობლემა ერთის მხრივ მდგომარეობს იმაში, რომ გრავიტა-  
ციული ურთიერთქმედება გაცილებით სუსტია დანარჩენ სამ ურთიერთქმედებაზე,  
ხოლო მეორეს მხრივ რადგანაც გრავიტაციული ურთიერთქმედება უკავშირდება  
პლანკის მასას, რატომ არის ჰიგსის ბოზონის დაკვირვებადი  $\mu \approx 125$  GeV მასა  
გაცილებით ნაკლები პლანკის  $M_{Pl} = \sqrt{\hbar c/G} \approx 1.22 \times 10^{19}$  GeV მასასთან შედა-  
რებით.

ერთ-ერთი მთავარი შესაძლო გადაჭრა ამ პრობლემების არის სუპერსიმეტ-  
რიული თეორიები. ამ თეორიების თანახმად, მატერიის ნაწილაკებს, ფერმიონებს,  
რომლებსაც ნახევარ-მთელი სპინი აქვთ, და ურთიერთქმედების გადამტან ნაწილა-  
კებს, ბოზონებს, რომლებსაც მთელი სპინი აქვთ, ჰყავთ სუპერპარტნიორები. ფერმი-  
ონებისთვის ეს სუპერპარტნიორები არიან ბოზონები, ხოლო ბოზონებისთვის ფერ-  
მიონები. ამით ეს თეორიები ცდილობენ აღადგინონ სიმეტრია მათ შორის. უნდა

არსებობდეს სუპერსიმეტრიული გარდაქმნები, რომლებსაც ისინი ერთმანეთში გადაჰყავს. მიუხედავად იმისა, რომ დღეისათვის არცერთ სუპერსიმეტრიულ თეორიას არ გააჩნია ექსპერიმენტული დადასტურება, უფრო მეტიც ბოლო დროის ექსპერიმენტებით მოხდა ზოგიერთი მათგანის გამორიცხვა, სუპერსიმეტრიები თეორიულ და ექსპერიმენტულ ფიზიკაში რჩება აქტიურ კვლევის საგნად.

ამ ნაშრომში განხილულია სუპერსიმეტრიული თეორიის მსგავსი თეორიის ასაგებად საჭირო სტრუქტურები. კერძოდ, გამოყვანილია ფერმიონული ნაწილაკების აღმწერი დირაკის განტოლება და ბოზონური ნაწილაკების აღმწერი მაქსველის განტოლებათა სისტემა შესაბამისი ლაგრანჟიანებით. ორივე სისტემა მიღებულია ერთიდაიგივე სამწრფივი სპლიტ ოქტონიონური ლაგრანჟიანის კონკრეტულ ზღვარში. სუპერსიმეტრიული თეორიებისგან განსხვავებით, ამ თეორიაში შესაძლოა არ იყოს საჭირო დამატებითი გრასმანული ცვლადების შემოყვანა, რადგანაც სპლიტ ოქტონიონური ალგებრა თავისთავად შეიცავს ნულის გამყოფებს. ასევე შესაძლოა არ გახდეს საჭირო დამატებითი ნაწილაკების პოსტულირებით შემოყვანა, რადგანაც ნაწილაკების სპექტრის კარნახი მოხდება თავად ალგებრიდან.

მათემატიკა ყოველთვის საინტერესო საძიებელი სფერო იყო ფიზიკოსებისთვის. ფიზიკის აღმოჩენები მრავალჯერ გახდა ახალი მათემატიკის ჩამოყალიბების წინაპირობა, ხშირად კი მათემატიკური მიღწევები უძღვოდა წინ თეორიული ფიზიკის განვითარებას. მაგალითად, ჰიპერკომპლექსურმა რიცხვებმა მნიშვნელოვანი ცვლილებები შემოიტანეს ფიზიკის სხვადასხვა თეორიებში. კერძოდ, შეიძლება აღინიშნოს კლიფორდის ალგებრების და სასრულ განზომილებიანი ნორმირმანი გაყოფადი ალგებრები. მათემატიკაში ცნობილი ჰურვიცის თეორემის თანახმად, არსებობს მხოლოდ ოთხი რიცხვითი სისტემა:  $\mathbb{R}$  ნამდვილი,  $\mathbb{C}$  კომპლექსური,  $\mathbb{H}$  კვადრნიონული და  $\mathbb{O}$  ოქტონიონური. ისტორიულად შედარებით ნაკლები ყურადღება ეთმობოდა უკანასკნელი სამი ალგებრის სპლიტ ვერსიებს:  $\mathbb{C}'$ ,  $\mathbb{H}'$  და  $\mathbb{O}'$ , მიუხედავად იმისა, რომ მათ გააჩნიათ ფიზიკური სისტემებისთვის დამახასიათებელი თვისებები. ყველაზე ნაკლებად დამკვიდრებული ფიზიკაში, ჩამოთვლილთაგან ყველაზე ფართო ალგებრები, ოქტონიონები და მათი სპლიტ ვერსიაა. ეს ნაწილობრივ იმით იხსნება, რომ მათთან მუშაობას, წარმოსახვითი ნაწილების სიჭარბის გარდა, განსაკუთრებულად რთულს ხდის ასოციატიურობის  $(ab)c = a(bc)$  თვისების არქონა. თუმცა კომპიუტერული ალგებრული სისტემების განვითარებას-



თან ერთად ასეთ სტრუქტურებთან მუშაობა გამარტივდა. ამ ნაშრომის ერთ-ერთი მიზანია ცოდნაში ამ ნაპრალების ამოვსება. სუპერსიმეტრიული თეორიები მათემატიკურად უკავშირდებიან ზემოთ ნახსენებ ჰურვიცის ალგებრებს  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  და  $\mathbb{O}$  [Kugo & Townsend 1983, Baez & Huerta 2009, Baez & Huerta 2011]. კერძოდ, ოქტონიონური ტრიალობა [Gamba 1968] კვლევის საგანია სუპერსიმეტრიებთან მიმართებაში [Schray 1994]. ამ ნაშრომში შემოთავაზებულია მათემატიკური სტრუქტურა, სპლიტ ოქტონიონური ტრიალობა, როგორც სუპერსიმეტრიული თეორიის შესაძლო საფუძველი.

ნახევარ საუკუნეზე მეტია ფიზიკაში უმნიშვნელოვანესი გახდა ჯგუფთა თეორია, მათემატიკის დარგი რომელიც შეისწავლის სიმეტრიებს. ნეთერის თეორემის მიხედვით ფიზიკაში შენახვის კანონები უკავშირდება ჯგუფებით განსაზღვრული გარდაქმნების მიმართ ფიზიკური კანონების ინვარიანტობას. მაგალითად, თუ კანონები ფიზიკურ სისტემაში უცვლელია დროში, არ არის დამოკიდებული ადგილმდებარეობაზე ან მიმართულებაზე, მაშინ ინახება შესაბამისად ენერგია, იმპულსი ან იმპულსის მომენტი. ჯგუფთა თეორიაზე დაფუძნებით შესაძლებელი გახდა მიკრო სამყაროში ზოგიერთი ნაწილაკის არსებობის წინასწარმეტყველება, რაც შემდეგ ექსპერიმენტულად დადასტურდა. გარდა ამისა მოხერხდა ელექტრომაგნიტური და სუსტი ურთიერთქმედებების გაერთიანება ე. წ. ელექტრო-სუსტ ურთიერთქმედებაში. ამ მიზეზების გამო ბევრი ფიზიკოსი დიდი გაერთიანების იმედებს აფუძნებს ჯგუფთა თეორიის გამოყენებაზე.

ნაწილაკების ფიზიკასა და ფარდობითობის თეორიაში ყველაზე მნიშვნელოვანია ლის ჯგუფები. ამ ჯგუფების ელემენტები ხშირად წარმოდგენილია, როგორც პარამეტრებზე დამოკიდებული მატრიცები. ლის ჯგუფებს შეესაბამებათ ლის ალგებრები, რომლებიც წარმოადგენენ ერთეულოვან ელემენტზე ჯგუფის მრავალსახეობის მხებ სივრცეს. ლის ალგებრა გვაძლევს საშუალებას წარმოვადგინოთ სრული ინფორმაცია ლის ჯგუფის სტრუქტურის შესახებ. ალგებრის ელემენტებს ეწოდებათ წარმომქმნელები, რადგან ისინი საშუალებას გვაძლევენ წარმოვქმნათ ჯგუფის ელემენტები [Georgi 1999].

ფიზიკაში ძირითადად გამოიყენება ე. წ. ნახევრად მარტივი ლის ალგებრები. ფიზიკური გამოყენებისთვის მნიშვნელოვანია ალგებრის შესაბამისი კაზიმირის ოპერატორების მოძებნა. ეს ოპერატორები გამოისახება ალგებრის ელემენტების მეშვე-

ობით და კომპუტირებენ ყველა ელემენტთან. მაგალითისთვის, კვანტურ მექანიკაში  $\mathfrak{so}(3)$  ალგებრის მეორე რიგის კაზიმირის ოპერატორი შეესაბამება სრული იმპულსის  $L^2$  მომენტს, ან სრულ  $J^2$  სპინს. პუანკარეს ჯგუფისთვის კაზიმირის ოპერატორების საკუთარი მნიშვნელობები შეესაბამება ნაწილაკის მასას და სპინს.

XIX საუკუნის მიწურულს ვილჰელმ კილინგმა და ელი კარტანმა მოახდინეს მარტივი ლის ალგებრების კლასიფიკაცია [Agricola 2008]. აღმოჩნდა, რომ ისინი (და მათი შესაბამისი ლის ჯგუფები) იყოფიან ოთხ უსასრულო ოჯახად და ხუთ განსაკუთრებულ შემთხვევად, რომლებიც არცერთ ოჯახს არ მიეკუთვნება.

განსაკუთრებული ჯგუფებიდან ყველაზე დაბალი რანგისაა  $G_2$ , რომელის არსებობის შესახებაც პირველად ივარაუდა ფრიდრიხ ენგელმა 1886 წელს [Agricola 2008].  $G_2$  ჯგუფის წარმომქმნელების რაოდენობა არის 14. კარტანმა აღმოაჩინა, რომ  $G_2$  წარმოადგენს ოქტონიონების ავტომორფიზმის ჯგუფს. მოგვიანებით აღმოჩნდა, რომ არაკომპაქტური  $G_2$  ჯგუფი აგრეთვე აღწერს ორ ერთმანეთზე მგორავ 1:3 ფარდობითი რადიუსის მქონე სფეროს [Bor & Montgomery 2009]. ფიზიკაში არსებობს მოსაზრება, რომ  $G_2$  ჯგუფი ასევე შეიძლება გამოყენებული იქნას ელემენტარული ნაწილაკების კლასიფიკაციისთვის [Silagadze 1994, Gogberashvili 2016b], ან დრო და სივრცის სიმეტრიების აღსაწერად [Zhevlakov 1982, Gogberashvili & Sakhelashvili 2015].

მოცემულ ნაშრომში შესწავლილია  $G_2$ -ს არაკომპაქტური ვარიანტი, რომელიც  $\mathbb{O}'$  სპლიტ ოქტონიონების ავტომორფიზმის ჯგუფია. აგრეთვე განხილულია მისი გეომეტრიული გამოყენებების შესაძლებლობა. მოძებნილია ამ ჯგუფის მეორე რიგის კაზიმირის ოპერატორი და ნაჩვენებია, რომ კერძო შემთხვევაში იგი შეიძლება წარმოდგენილი იქნას პუანკარეს ჯგუფის ორი დამოუკიდებელი კაზიმირის ოპერატორის ჯამის სახით.

## 1.2 კვლევის მიზნები და ამოცანები

კვლევის მიზანია სუპერსიმეტრიული მსგავსი თეორიის შექმნა სპლიტ ოქტონიონურ ალგებრასა და მასთან დაკავშირებულ რვა განზომილებიან ტრიალობაზე დაფუძნებით. ნაშრომის ამოცანაა მოხდეს ტრიალობა ინვარიანტული სამწრფივი ფორმის დაფუძნებით მაქსველის და დირაკის ლაგრანჟიანების აგება.

განხილულია ტრიალობის სიმეტრია ოქტონიონების სპლიტ ვერსიასთან მიმართებაში. ამ შემთხვევაში სივრცე არ არის ევკლიდური, არამედ გააჩნია  $(4, 4)$  მეტრიკა.  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  და  $\mathbb{O}$  ალგებრებისგან განსხვავებით, მათი სპლიტ ვერსიები  $\mathbb{C}'$ ,  $\mathbb{H}'$  და  $\mathbb{O}'$  არ არიან გაყოფადი ალგებრები, რადგან ისინი შეიცავენ ნულის გამყოფებს. თუმცა მათ სწორედ ეს აახლოვებს ფიზიკასთან, რადგან ნულის გამყოფებს აქვთ სინათლის კონუსის სტრუქტურა და ამით კავშირი აქვთ მინკოვსკის სივრცესთან. მათგან მხოლოდ სპლიტ ოქტონიონური ალგებრა  $\mathbb{O}'$  შეიცავს მინკოვსკის სივრცეს ქვესივრცედ. ასეთ სივრცეში ვექტორების სიმეტრიის ჯგუფი  $SO(8)$  ნაცვლდება ფსევდო-ორთოგონალური არა-კომპაქტური ჯგუფით  $SO(4, 4)$ , ხოლო მისი ორმაგი დაფარვა  $Spin(8)$ , რომელიც წარმოადგენს სპინორების სიმეტრიის ჯგუფს, ნაცვლდება ჯგუფით  $Spin(4, 4)$ . მნიშვნელოვანია აღინიშნოს, რომ  $SO(4, 4)$  ქვეჯგუფად შეიცავს ფიზიკური სივრცის აღმწერ ლორენცის ჯგუფს. ამ თვისების გამო სპლიტ ოქტონიონების შესწავლა საინტერესოა გეომეტრიულ კონტექსტში [Gogberashvili 2002, Gogberashvili 2005, Gogberashvili & Sakhelashvili 2015, Gogberashvili 2016a, Gogberashvili & Gurchumelia 2019].

გრძელვადიანი მიზანია სუპერსიმეტრიული ტიპის თეორიის აგება. ამ კონკრეტული კვლევის მიზანია თეორიის შესაძლო ლაგრანჟიანის, ან მისი ურთიერთქმედების წევრის მიღება, რომლის კანდიდატიც არის სპლიტ ოქტონიონური სამწრფივი ფორმა  $\mathcal{F} : \mathbb{O}' \times \mathbb{O}' \times \mathbb{O}' \rightarrow \mathbb{R}$ . აგრეთვე ფსევდო ორთოგონალური ჯგუფების სპლიტ ოქტონიონური წარმოდგენის დადგენა.

გამოკვლევული იქნა ტრიალობის სიმეტრია ოქტონიონების სპლიტ ვერსიასთან მიმართებაში [Gurchumelia & Gogberashvili 2021]. ტრიალობა წარმოადგენს სპინორების და ვექტორების ექვივალენტობას რვა განზომილებიან სივრცეში. ამ შემთხვევაში რვა განზომილებიანი სივრცე არის 4 დროის მაგვარი და 4 სივრცის მაგვარი განზომილება, რის გამოც მას  $(4+4)$ -სივრცეს ეძახიან. სპინორული და ვექტო-

რული ობიექტების გარდაქმნის სიმეტრიის ჯგუფებია  $SO(4, 4)$  და  $Spin(4, 4)$ . ამ გარდაქმნების ინვარიანტული ფორმები კი არიან ორწრფივი და სამწრფივი ფორმები სპლიტ ოქტონიონურ ვექტორზე და სპინორის ორ სპლიტ ოქტონიონურ კირალურ კომპონენტებზე. ამ ნაშრომში ეს ფორმები გამოყენებულია ლაგრანჟიანის ჩასაწერად.

ლაგრანჟიანის ასაგებად აგრეთვე საჭიროა გრადიენტული ოპერატორი. ეს მოითხოვს სპლიტ ოქტონიონური ფუნქციების ანალიზს, რომელის შესახებაც მათემატიკური ლიტერატურა არ არსებობს, ხოლო ჩვეულებრივი ოქტონიონური ფუნქციების ანალიზზე ლიტერატურის რაოდენობა მცირეა [Kauhanen & Orelma 2018, Sudbery 1979].

დირაკის და მაქსველის განტოლებები სპლიტ ოქტონიონების მეშვეობით ჩაწერილი იყო შემდეგ სტატიებში [Gogberashvili 2006a, Gogberashvili 2006b, Chanyal, Bisht & Negi 2011], თუმცა აქამდე არ ყოფილა დაწერილი მათი შესაბამისი ლაგრანჟიანი და შესაბამისად არ იქნა ის დაკავშირებული ტრიალობა ინვარიანტულ სამწრფივი ფორმასთან.

## თავი 2

# ლიტერატურის მიმოხილვა

### 2.1 ზოგადი მიმოხილვა

ოქტონიონები რვა განზომილებიანი ალგებრაა და უდიდესია ნორმიან გაყოფად ალგებრათა შორის. იგი ყველაზე ნაკლებადაა დამკვიდრებული ფიზიკაში მიუხედავად სხვადასხვა მცდელობებისა [Okubo 1995, Gürsey & Tze 1996, Löhmus, Paal & Sorgsepp 1994, Löhmus, Paal & Sorgsepp 1998]. ოქტონიონების გამოყენება შემოთავაზებულ იქნა კვარკების ფერის სიმეტრიისთვის [Günaydin, M., & Gürsey 1973, Morita 1981], დიდ გაერთიანებულ თეორიებში [Sudbery 1984, Dixon 1990, Castro 2007], კვანტურ მექანიკაში [Günaydin, Piron & Ruegg 1978, Dzhunushaliev 2006], სიმთა და M-თეორიაში [Chung & Sudbery 1987, Lukierski & Toppan 2002, Kuznetsova & Toppan 2006, Boya 2003], სიგნალების ანალიზში [Gao & Li 2021, Błaszczuk 2020] და სხვა.

რვა განზომილებიან ევკლიდურ სივრცეს, რომელშიც ოქტონიონები არსებობენ, გააჩნია უნიკალური თავისებურება. კერძოდ, ამ სივრცეში ერთმანეთს ემთხვევა ვექტორის და კირალური სპინორების განზომილება, და მათზე არსებობს სამწრფივი ინვარიანტული ფორმა, რომელშიც ისინი ერთმანეთისგან არ გაირჩევა. ამ თვისებას ეწოდება ტრიალობის სიმეტრია [Gamba 1968, Dray & Manogue] და ხშირად ჩამოყალიბებულია სპინ ჯგუფის ავტომორფიზმებზე და  $D_4$  დინკინის დიაგრამის სიმეტრიაზე დაყრდნობით [Lounesto 2001].

## 2.2 კაზიმირის ოპერატორი და პუანკარეს ჯგუფი

ნახევრად მარტივი კომპაქტური ლის ალგებრების კაზიმირის ოპერატორების მოძებნის ალგორითმი მოყვანილია სტატიაში [Gruber & O'Raiifeartaigh 1964]. ამ ნაშრომში ეს ალგორითმი არაკომპაქტური  $\mathfrak{g}_2$  ლის ალგებრის კაზიმირის ოპერატორის მოსაძებნად იქნა წარმატებით გამოყენებული. ალგორითმის თანახმად რაიმე  $\mathfrak{h}$  ლის ალგებრისთვის უნდა მოიძებნოს

$$Q = \sum_{m,n} g_{mn} \hat{z}_m \otimes Z_n \quad (2.1)$$

მატრიცა, სადაც  $\hat{z}_k$  არის  $\mathfrak{h}$  ლის ალგებრის საბაზისო წრფივად დამოუკიდებელი ელემენტი,  $Z_k$  მისი შესაბამისი ელემენტია რომელიმე მატრიცულ წარმოდგენაში, ხოლო

$$g_{mn} = \text{tr}(X_m X_n) \quad (2.2)$$

კლინგის მეტრიკაა. ამ  $Q$  მატრიცის გამოყენებით  $p$ -ური რიგის კაზიმირის ოპერატორი არის

$$C_p = \text{tr}(Q^p), \quad (2.3)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ ყოველი  $\hat{z}_k$  ელემენტისთვის ადგილი აქვს

$$[Q^p, \hat{z}_k] = 0. \quad (2.4)$$

მაგალითად ლორენცის ჯგუფის კაზიმირის ოპერატორს აქვს სახე [Liu, Tang & Xun 2011, Bekaert et al 2021]

$$\begin{aligned} C_{\text{Lorentz}} &= \frac{1}{2} M_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \\ &= \sum_{n=1}^3 (L_n - K_n), \end{aligned} \quad (2.5)$$

სადაც იმპულსის მომენტის ოპერატორის,

$$L_k = \sum_{ij} i \epsilon_{ijk} x_i \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (2.6)$$

და ლორენცის ბუსტების ოპერატორის,

$$K_n = -i \left( x_n \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{x_n} \right), \quad (2.7)$$

ჩაწერა 4-დნიშვნებში შეიძლება

$$P_\mu = -i \frac{\partial}{\partial x}, \quad (2.8)$$

4-იმპულსის ოპერატორის გამოყენებით, როგორც:

$$M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu. \quad (2.9)$$

ამ ჩანაწერებს შორის არის შემდეგი კავშირი

$$M_{mn} = \sum_k \epsilon_{mnk} L_k, \quad (2.10)$$

$$M_{0\ell} = -M_{\ell 0} = K_\ell.$$

პუნკარეს ჯგუფს ორი კაზიმირის ოპერატორი გააჩნია [Bekaert et al 2021], რომელთაგანაც ფიზიკური აპლიკაციებისთვის მნიშვნელოვანია მეორე რიგის ოპერატორი  $P_\mu P^\mu$ , რომლის საკუთარი მნიშვნელობის განტოლება არის კლაინ-გორდონის განტოლება.

## 2.3 კეილი-დიქსონის კონსტრუქციები ფიზიკაში

განზოგადებული კეილი-დიქსონის კონსტრუქციით [Albert 1942] მოცემული  $\mathbb{A}_n$  ინვოლუციური<sup>1</sup> ალგებრის გამოყენებით ხდება ახალი

$$\mathbb{A}_{n+1} = \mathbb{A}_n \oplus \mathbb{A}_n \quad (2.11)$$

ინვოლუციურ ალგებრის აგება, როგორც:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) (b_1, b_2) &= (a_1 b_1 - \gamma b_2^* a_2, b_2 a_1 + a_2 b_1^*) \\ (a_1, a_2)^* &= (a_1^*, -a_2) \end{aligned} \quad (2.12)$$

სადაც  $a = (a_1, a_2)$  და  $b = (b_1, b_2)$  არიან  $\mathbb{A}_{n+1}$  ალგებრის ელემენტები,  $a_1, a_2, b_1$  და  $b_2$  არიან  $\mathbb{A}_n$  ალგებრის ელემენტები,  $\gamma = \pm 1$  ხოლო  $*$  სიმბოლოთი მოცემულია ინვოლუციის ოპერაცია. (2.11) ფორმულის იტერაციულად გამოყენებით მიიღება ინვოლუციურ ალგებრათა მიმდევრობა. თუ  $\mathbb{A}_0 = \mathbb{R}$  და  $\gamma = 1$  მაშინ მიიღება ალგებრის მიმდევრობა:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_0 &= \mathbb{R} && \text{ნამდვილი რიცხვები,} \\ \mathbb{A}_1 &= \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 && \text{კომპლექსური რიცხვები,} \\ \mathbb{A}_2 &= \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4 && \text{კვატერნიონები,} \\ \mathbb{A}_3 &= \mathbb{O} \simeq \mathbb{R}^8 && \text{ოქტონიონები,} \\ \mathbb{A}_4 &= \mathbb{S} \simeq \mathbb{R}^{16} && \text{სედენიონები.} \\ &\vdots && \end{aligned} \quad (2.13)$$

ყოველი გაორმაგებისას იკარგება ნამდვილ რიცხვთა ველისთვის დამახასიათებელი თვისებები, მაგალითად  $\mathbb{C}$ -დან დაწყებული აღარ გვაქვს დალაგება,  $\mathbb{H}$ -დან კომუტაციურობა,  $\mathbb{O}$ -დან ასოციატიურობა,  $\mathbb{S}$ -დან ალტერნატიულობა, ხოლო შემდეგი ალგებრებისთვის ხარისხოვანი ასოციატიურობა. მიმდევრობიდან პირველი ოთხი ნორმიანი გაყოფადი ალგებრებია. ჰურვიცის თეორემის თანახმად ეს ერთადერთი ოთხი ნორმიანი გაყოფადი ალგებრაა რის გამოც მათ ჰურვიცის ალგებრებს უწოდებენ.

<sup>1</sup>ინვოლუცია ეწოდება ისეთ  $f$  ფუნქციას, რომლისთვისაც  $f^{-1} = f$ , მაგალითად კომპლექსური შეუღლება.



ნორმიან გაყოფად ალგებრებსა და სუპერსიმეტრიებს შორის არსებობს ღრმა კავშირი. მაგალითად არააბელური იანგ-მილსის ველებისთვისა და გრინ-შვარცის სუპერსიმებისთვის სუპერსიმეტრია შესაძლებელია მხოლოდ 3, 4, 6 ან 10 განზომილებაში, რაც 2-ით მეტია იმ გაყოფადი ალგებრების განზომილებებზე რომლებზეც ისინი არიან დამოკიდებული [Baez & Huerta 2009]. ნორმიანი გაყოფადი ალგებრებიდან გარკვეული სისტემური პროცედურით მიიღება იმავე განზომილებიანი პუანკარეს ლის სუპერალგებრები [Baez & Huerta 2011].

## 2.4 კლიფორდის ალგებრები და სპინორები ფიზიკაში

კლიფორდის ალგებრები ქმნიან ფიზიკისთვის მნიშვნელოვან მათემატიკურ სტრუქტურებს. ისინი წარმოადგენენ კომპლექსური და კვადრნიონული ალგებრების ყველაზე ბუნებრივ განზოგადებას ნებისმიერ განზომილებიანი სივრცეებისათვის. კლიფორდის ალგებრების თეორია პირდაპირ კავშირშია ფიზიკისთვის მნიშვნელოვან ორთოგონალურ ჯგუფებთან და კვადრატული ფორმების თეორიასთან. ნამდვილ რიცხვთა ველზე განსაზღვრული კლიფორდის ალგებრა გამოიყენება გეომეტრიაში [Hestenes & Sobczyk 2012], სადაც ის გეომეტრიული ალგებრის სახელით არის ცნობილი.

ფიზიკაში ერთერთ ყველაზე მნიშვნელოვან ობიექტთა კლასს სპინორები წარმოადგენენ. მათზე საუბრისთვის ყველაზე ხელსაყრელია კლიფორდის ალგებრების ენა. მისი საშუალებით შესაძლებელია სპინორის ცნების განზოგადება ნებისმიერ განზომილებიანი სივრცეებისათვის, რომლებსაც გააჩნიათ დიაგონალური გადაუვარებელი მეტრიკა. ამ ქვეთავში განხილულია ორთოგონალური ჯგუფების სპინორული და ვექტორული წარმოდგენების მიღების პროცედურა, რომელიც ეფუძნება [Lounesto 2001] სახელმძღვანელოს.

კლიფორდის ალგებრები აგრეთვე ახდენენ სკალარული ნამრავლის და გარე ნამრავლის გაერთიანებას ე.წ. გეომეტრიულ (კლიფორდის) ნამრავლში, რითაც ხდება სტანდარტული გიბს-ჰევისაიდის ვექტორული აღრიცხვის, აგრეთვე კომპლექსური, კვადრნიონული და ზოგიერთი მატრიცული ალგებრების განზოგადება და ერთ სისტემაში თავმოყრას.

$\mathbb{R}^2$  ვექტორული სივრცის  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  ელემენტი რაიმე ორთონორმირებულ ბაზისში მოიცემა როგორც:

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2, \quad (2.14)$$

სადაც  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  ხოლო  $e_1$  და  $e_2$  ბაზისის ელემენტებია. სტანდარტულ ვექტორულ აღრიცხვაში საბაზისო ელემენტებად აიღება ყველაზე მარტივი მატრიცული სტრუქტურა, რომელსაც შეუძლია დააკმაყოფილოს ვექტორული სივრცის აქსიომები, მაგალითად სვეტ-ვექტორები. მაგრამ ამგვარი ბაზისი არ იძლევა ალგებრის ჩამოყალიბების საშუალებას, რადგან ალგებრისთვის აუცილებელია ჩაკეტილობა, როგორც მიმატების ასევე გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ერთერთი გზა ალგებრის

მიღების არის საბაზისო ვექტორების წარმოდგენა, როგორც  $e_1 = 1$  და კომპლექსურ წარმოსახვით  $e_2 = i$  ერთეულად. ამ გზით მიიღება კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრას  $\mathbb{C}$ . თუ კომპლექსურ რიცხვთა ალგებრულ თანადობას  $i^2 = -1$  ჩავანაცვლებთ  $i^2 = 1$  თანადობით მაშინ მივიღებთ სპლიტ კომპლექსურ  $\mathbb{C}'$  ალგებრას, რომელიც ევკლიდური სივრცის ნაცვლად მინკოვსკის ისეთ ქვესივრცეს შეესაბამება სადაც ერთი განზომილება დროა ხოლო მეორე კი რომელიმე ერთ სივრცითი კოორდინატი. ორგანზომილებიანი ევკლიდური სივრცის კლიფორდის ალგებრა  $\mathcal{Cl}_2(\mathbb{R})$  შეიძლება აიგოს შემდეგი მოთხოვნიდან

$$\mathbf{x}^2 = |\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad (2.15)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^2 &= \mathbf{x}\mathbf{x} \\ &= (x_1e_1 + x_2e_2)(x_1e_1 + x_2e_2) \\ &= x_1^2e_1^2 + x_2^2e_2^2 + x_1x_2(e_1e_2 + e_2e_1), \end{aligned} \quad (2.16)$$

ხოლო (2.15) მოთხოვნიდან მიიღება

$$e_1^2 = e_2^2 = 1, \quad \text{და} \quad e_1e_2 = -e_2e_1, \quad (2.17)$$

რაც ერთიანდება შემდეგ თანადობაში

$$e_ie_j + e_je_i = 2\delta_{ij}, \quad \text{სადაც} \quad i, j \in \{1, 2\}. \quad (2.18)$$

მაგრამ (2.15) მოთხოვნასთან ერთად, რაც (2.18) თანადობის ექვივალენტურია,  $\mathcal{Cl}_2(\mathbb{R})$  ალგებრის მისაღებად დამატებით საჭიროა გამრავლების ასოციატიურობის მოთხოვნა  $(ab)c = a(bc)$ , რის საფუძველზეც აიგება  $\mathcal{Cl}_2(\mathbb{R})$  ალგებრის საბაზისო ელემენტების გამრავლების ტაბულა.

	1	$e_1$	$e_2$	$e_{12}$
1	1	$e_1$	$e_2$	$e_{12}$
$e_1$	$e_1$	1	$e_{12}$	$e_2$
$e_2$	$e_2$	$-e_{12}$	1	$-e_1$
$e_{12}$	$e_{12}$	$-e_2$	$e_1$	-1

(2.19)

გამოიყენება  $e_1 e_2 = e_{12}$  აღნიშვნა. ნიშანდობლივია, რომ (2.19) გამრავლების ტაბულაში არ შედის  $e_{21} = e_2 e_1$ , რადგან იგი, (2.17) ფორმულებიდან გამომდინარე, წრფივად დამოკიდებულია  $e_{12}$  ელემენტზე. (2.19) ტაბულიდან აგრეთვე ჩანს, რომ  $\mathcal{Cl}_2(\mathbb{R})$ , როგორც წრფივი სივრცე, იზომორფულია  $\mathbb{R}^4$  ვექტორული სივრცის. მართლაც, ამ ალგებრის ზოგადი ელემენტი შემდეგნაირად ჩაიწერება

$$x = x_0 + \underbrace{x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_{12} e_{12}}_{\mathbf{x}}, \quad (2.20)$$

სადაც  $x_0, x_1, x_2, x_{12} \in \mathbb{R}$ .

ქვესივრცე, რომელსაც  $1$  და  $e_{12}$  საბაზისო ელემენტები ქმნიან, ალგებრულად ჩაკეტილია და  $\mathbb{C}$  კომპლექსურ რიცხვთა იზომორფულია, ხოლო  $e_1$  და  $e_2$  ელემენტები წარმომქმნელ ქვესივრცეს ქმნიან. წარმომქმნელი ქვესივრცის ორი

$$\mathbf{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2 \quad (2.21)$$

და

$$\mathbf{b} = b_1 e_1 + b_2 e_2 \quad (2.22)$$

ელემენტის ნამრავლით მიიღება

$$\mathbf{ab} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}, \quad (2.23)$$

სადაც

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \in \mathbb{R} \quad (2.24)$$

სკალარული სიდიდეა, ხოლო

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = e_{12} (a_1 b_2 - a_2 b_1) \quad (2.25)$$

გარე გამრავლების ოპერაციაა, რომელსაც გააჩნია შემდეგი თვისება

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}. \quad (2.26)$$

(2.25) წარმოადგენს ბივექტორს წრფივი  $\wedge^2 \mathbb{R}$  სივრციდან. ეს უკანასკნელი სივრცე ქმნის გარე ალგებრას  $\wedge$  გარე გამრავლების ოპერაციის მიმართ. ობიექტს  $x_{12} e_{12} \in \wedge^2 \mathbb{R}$  ეძლევა მიმართული ფართობის ინტერპრეტაცია, რაც ნიშნავს, რომ მისი ნიშ-

ნი დაკავშირებულია სიბრტყის ბრუნვის მიმართულებასთან. მართლაც, სტანდარტული ვექტორული აღრიცხვიდან ცნობილია, რომ

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_3 = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (2.27)$$

წარმოადგენს  $\mathbf{a}$  და  $\mathbf{b}$  ვექტორებით შედგენილი პარალელოგრამის ფართობს, რომლის ნიშანიც დამოკიდებულია ვექტორების ურთიერთ განლაგებაზე.

მთლიანი ალგებრა შეიძლება წარმოდგენილ იქნას, როგორც მისი ქვესივრცეების პირდაპირი ჯამი

$$\mathcal{C}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}, \quad (2.28)$$

სადაც

$$\begin{aligned} \text{სკალარია:} & \quad x_0 \in \mathbb{R}, \\ \text{ვექტორია:} & \quad x_1 e_1 + x_2 e_2 \in \mathbb{R}^2, \\ \text{ბივექტორია:} & \quad x_{12} e_{12} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

ობიექტის  $x_{12} e_{12} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}$ , როგორც მიმართული ფართობის ინტერპრეტაცია იძლევა  $\mathbb{R}^2$  სივრცეში მობრუნებების წარმოდგენის საშუალებას. მობრუნებების აგება შეიძლება უფრო ელემენტარული არეკვლის გეომეტრიული ოპერაციით. თავად არეკვლა კი ალგებრულად შებრუნებულ ვექტორზე გამრავლებას უკავშირდება. კლიფორდის ალგებრებში ვექტორების გამრავლების გარდა შეიძლება ერთი ვექტორის მეორეზე გაყოფაც, რადგანაც არსებობს  $\mathbf{x}$  ვექტორის შებრუნებული  $\mathbf{x}^{-1}$ , ისეთი, რომ  $\mathbf{x}\mathbf{x}^{-1} = 1$ . შებრუნებული გამოისახება  $\mathbf{x}$ -ს მეშვეობით როგორც:

$$\mathbf{x}^{-1} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}. \quad (2.30)$$

გარდაქმნა

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b}^{-1}, \quad (2.31)$$

ახდენს  $\mathbf{x}$  ვექტორის არეკვლას  $\mathbf{b}$  ვექტორის მიმართ. ორჯერ არეკვლა სხვადასხვა ვექტორების მიმართ

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{x}\mathbf{b}^{-1}\mathbf{a}^{-1} = (\mathbf{a}\mathbf{b})\mathbf{x}(\mathbf{a}\mathbf{b})^{-1}, \quad (2.32)$$

კი კოორდინატა სათავის მიმართ მობრუნებაა კუთხით, რომელიც ორჯერ მეტია  $\mathbf{a}$  და  $\mathbf{b}$  ვექტორებს შორის არსებულ კუთხეზე. ამ უკანასკნელიდან უკვე ჩანს კლიფორდის ალგებრის სპინორ-ვექტორული თვისებები. ფორმულა (2.32) აგრეთვე გვაძლევს  $SO(2)$  ჯგუფის რაციონალურ წარმოდგენას, რადგან თუ  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x} \in \mathbb{Q}^2$  მაშინ  $\mathbf{x}' \in \mathbb{Q}^2$ . ორთოგონალური გარდაქმნის (2.32) ტრანსცენდენტული სახის მისაღებად ზოგადობის დაურღვევლად შეიძლება შემდეგი დაშვების გაკეთება

$$|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1, \quad (2.33)$$

საიდანაც

$$|\mathbf{ab}| = 1. \quad (2.34)$$

რადგანაც არსებობს იზომორფიზმი  $\mathbf{ab} \in \mathbb{R} \oplus \wedge^2 \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}$ , რომლითაც

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 1 \\ e_{12} &\mapsto i \end{aligned}, \quad (2.35)$$

შესაძლებელია ეილერის ფორმულის გამოყენება

$$\mathbf{ab} = \exp\left(-\frac{1}{2}e_{12}\vartheta\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\vartheta\right) - e_{12}\sin\left(\frac{1}{2}\vartheta\right), \quad (2.36)$$

სადაც  $\vartheta$  არის კუთხე  $\mathbf{a}$  და  $\mathbf{b}$  ვექტორებს შორის. მიიღება

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = L_{12}(\vartheta) \mathbf{x} L_{12}(-\vartheta). \quad (2.37)$$

სადაც

$$L_{12}(\vartheta) = \exp\left(-\frac{1}{2}e_{12}\vartheta\right). \quad (2.38)$$

კლიფორდის ალგებრებს გააჩნიათ მატრიცული წარმოდგენა.  $\mathcal{Cl}_2(\mathbb{R})$  ალგებრის წარმომქმნელების მატრიცული წარმოდგენა შეიძლება როგორც:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

საიდანაც გამოვა, რომ

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

$$e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

ეს მატრიცები აგრეთვე ქმნიან 2 განზომილებიანი კვადრატული მატრიცების რგოლის სრულ ბაზისს, ანუ ადგილი აქვს შემდეგ ალგებრულ იზომორფიზმს

$$\mathcal{Cl}_2(\mathbb{R}) \simeq \text{Mat}_2(\mathbb{R}). \quad (2.43)$$

საზოგადოდ მატრიცების გამრავლება უფრო შრომატევადია ვიდრე კლიფორდის ალგებრის თანადობის გამოყენება, მაგრამ მატრიცებით ადვილია მინიმალური იდეალების მოძებნა. მარცხენა (მარჯვენა) იდეალი ისეთი ქვესივრცეა, რომელიც ჩაკეტილია მარცხნიდან (მარჯვნიდან) ალგებრის ზოგადი ელემენტით მოქმედების მიმართ. იდეალის მაგალითია მატრიცა, რომლის პირველი სვეტი არანულოვანია ხოლო მეორე სვეტი ნულია

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 + e_1)\psi_1 + \frac{1}{2}(e_1 - e_{12})\psi_2, \quad (2.44)$$

$\psi_1, \psi_2 \in \mathbb{R}$ , რადგან მასზე მარცხნიდან ნებისმიერი  $A \in \text{Mat}_2(\mathbb{R})$  მატრიცით მოქმედებით მეორე სვეტი ისევ ნული რჩება, ხოლო პირველი სვეტი კი ნებისმიერი შეიძლება გამოვიდეს. ეს მარცხენა იდეალი მინიმალურია, რადგან იგი არ შეიცავს უფრო პატარა არატრივიალურ ქვეიდეალებს. კლიფორდის ალგებრის იდეალი ფიზიკაში წარმოადგენს სპინორს, რადგან მასზე (2.38) ფორმულაში მოცემული ოპერატორით მარცხნიდან მოქმედებით

$$\psi \rightarrow \psi' = L_{12}(\vartheta)\psi \quad (2.45)$$

მიიღება  $SO(2)$  ორთოგონალური ჯგუფის სპინორულ წარმოდგენას  $Spin(2)$ . აგ-

რეთვე ადვილი შესამჩნევია, რომ ამ ალგებრაში არსებობს მეორე სპინორიც

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(e_1 + e_{12})\phi_1 + \frac{1}{2}(1 - e_1)\phi_2.$$

იდეალების მოძებნა შეიძლება იდემპოტენტის გამოყენებით. იდემპოტენტი ობიექტია  $f^2 = f$  თვისებით, მაგალითად

$$f_+ = \frac{1}{2}(1 + e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.46)$$

$$f_- = \frac{1}{2}(1 - e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

იდემპოტენტებზე მარცხნიდან ალგებრის ზოგადი ელემენტით მოქმედებით მიიღება მარცხენა იდეალები

$$\psi = \mathcal{Cl}_2(\mathbb{R}) f_+ = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.48)$$

$$\phi = \mathcal{Cl}_2(\mathbb{R}) f_- = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.49)$$

შესაბამისად მარჯვნიდან მოქმედებით შესაძლებელია მარჯვენა იდეალების მიღებაც.

### ფიზიკური სივრცის ალგებრა $\mathcal{Cl}_3(\mathbb{R})$

შედეგების განზოგადება საკმაოდ მარტივია ნებისმიერი (ფსევდო)ეკვლიდური სივრცისთვის. 3 განზომილებიანი სივრცის ალგებრის მიღება იწყება (2.18) ფორმულის განზოგადებით

$$e_i e_j + e_j e_i = 2\delta_{ij}, \quad \text{სადაც} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.50)$$

გამოიყოფა ქვესივრცეები

$$\mathcal{Cl}_3(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}, \quad (2.51)$$



რომელთა ზოგადი ელემენტებია

$$\begin{aligned}
 \text{სკალარი :} & & x_0 \in \mathbb{R}, \\
 \text{ვექტორი :} & & x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 \in \mathbb{R}^3, \\
 \text{ბივექტორი :} & & x_{23} e_{23} + x_{31} e_{31} + x_{12} e_{12} \in \bigwedge^2 \mathbb{R}^3, \\
 \text{ფსევდოსკალარი :} & & x_{123} e_{123} \in \bigwedge^3 \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{2.52}$$

ვექტორული (წარმომქმნელი) ქვესივრცის ელემენტი ისევ აღინიშნება როგორც:

$$\mathbf{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \tag{2.53}$$

ხოლო ბივექტორი კი

$$\tilde{\mathbf{y}} = y_1 e_{23} + y_2 e_{31} + y_3 e_{12}. \tag{2.54}$$

ორი განსხვავებული ვექტორის გამრავლება ხდება ისევ (2.23) ფორმულით, თუმცა გარე ნამრავლი ამჯერად 3 განზომილებიანია

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = e_{123} (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = e_{123} \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e_{23} & e_{31} & e_{12} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{2.55}$$

რადგანაც  $\mathcal{Cl}_3(\mathbb{R})$  ალგებრაში ვექტორის და ბივექტორის განზომილებები ერთხვევა, შესაძლებელია ვექტორული ობიექტის ტიპის შეცვლა ბივექტორულ ობიექტად როგორც:

$$e_{123} \mathbf{x} = \mathbf{x} e_{123} = \tilde{\mathbf{x}}, \tag{2.56}$$

და პირიქით

$$e_{123} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\mathbf{x}} e_{123} = -\mathbf{x}, \tag{2.57}$$

რაც წარმოადგენს ჰოჯის დუალიზას. ნულოვანი და უმაღლესი გრადაციის სივრცეების პირდაპირი ჯამი აქაც იზომორფულია კომპლექსურ ალგებრის

$$\mathbb{R} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}. \tag{2.58}$$

აგრეთვე ადგილი აქვს იზომორფიზმს სხვა გაყოფად ალგებრასთან, კერძოდ, შემდეგი ქვესივრცისა ჰამილტონის კვატერნიონებთან

$$\mathbb{R} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{H}. \quad (2.59)$$

ალგებრა  $\mathcal{Cl}_3(\mathbb{R})$  იზომორფულია  $\text{Mat}_2(\mathbb{C})$  რგოლის, რადგან წარმომქმნელები  $e_1, e_2$  და  $e_3$  შეიძლება წარმოდგენილ იქნას პაულის მატრიცებით

$$e_1 = \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

$$e_2 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

$$e_3 = \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

ორთოგონალური ჯგუფის  $SO(3)$  სპინორული და ვექტორული წარმოდგენები შეიძლება იმავე პრინციპებით აიგოს, რითაც წინა პარაგრაფში  $SO(2)$  იქნა აგებული. იდეალტენტის გამოყენებით მოიძებნება სპინორის სახე

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.63)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & \phi_1 \\ 0 & \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.64)$$

სადაც ამჯერად  $\psi_1, \psi_2, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}$ . შემდეგი კვატერნიონული ობიექტის გამოყენებით

$$L(\tilde{\mathbf{v}}) = \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{v}}\right), \quad (2.65)$$

მიიღება  $SO(3)$  ჯგუფის ვექტორული

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = L(\tilde{\mathbf{v}}) \mathbf{x} L(-\tilde{\mathbf{v}}) \quad (2.66)$$

და სპინორული

$$\psi \rightarrow \psi' = L(\tilde{\mathbf{v}})\psi, \quad (2.67)$$

წარმოდგენები.

### დროსივრცის ალგებრა $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$

ევკლიდური სივრცეების გარდა, აგრეთვე თავისუფლად შესაძლებელია ნებისმიერი სხვა დიაგონალური მეტრიკის მქონე სივრცის გეომეტრიული ალგებრის მიღება. ამისთვის (2.18) ალგებრულ თანადობაში მარჯვენა მხარეს კრონეკერის  $\delta_{ij}$  სიმბოლოს ნაცვლად უნდა ჩაისვას შესაბამისი სივრცის მეტრიკა  $g_{ij}$ . ამ პარაგრაფში განხილულია მინკოვსკის სივრცე  $\mathbb{R}^{1,3}$  და მასთან დაკავშირებულ დროსივრცის ალგებრა  $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$ . ალგებრულ თანადობას აქვს სახე

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}, \quad (2.68)$$

სადაც

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1), \quad (2.69)$$

განსხვავებით ევკლიდური სივრცის ალგებრებისა, აქ წარმომქმნელი სივრცის საბაზისო ელემენტების კვადრეტი აღარ არის ყოველთვის 1-ს ტოლი, არამედ

$$e_0^2 = -e_1^2 = -e_2^2 = -e_3^2 = 1. \quad (2.70)$$

ქვესივრცეების სტრუქტურა კი შემდეგნაირია

$$\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{1,3} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{R}^{3,3} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{R}^{1,3} \oplus \bigwedge^4 \mathbb{R}, \quad (2.71)$$

სადაც  $\mathbb{R}^{p,q}$  აღნიშნავს  $(p+q)$ -სივრცეს  $(p, q)$  მეტრიკით.

წარმომქმნელი  $e_\mu$  ელემენტების წარმოდგენა შესაძლებელია დირაკის  $\gamma_\mu$  მატრიცების საშუალებით

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.72)$$

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

მთლიანი ალგებრა  $\mathcal{Cl}_{1,3}(\mathbb{R})$  კი იზომორფულია  $\text{Mat}_2(\mathbb{H})$  რგოლის.

ამ სივრცის სიმეტრიის ჯგუფი, რომელის მიმართაც

$$\mathbf{x}^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \quad (2.74)$$

კვადრატული ფორმა ინვარიანტულია, არის ლორენცის ჯგუფი  $SO(1, 3)$ . ლორენცის ჯგუფისთვის ვექტორული და სპინორული წარმოდგენები მსგავსად აიგება

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = L_{\mu\nu}(\vartheta) \mathbf{x} L_{\mu\nu}(-\vartheta), \quad (2.75)$$

გარდაქმნების კომპოზიციით, სადაც

$$L_{\mu\nu}(\vartheta) = \exp\left(-\frac{1}{2}\vartheta e_{\mu\nu}\right). \quad (2.76)$$

$Spin(1, 3)$  ისევ  $L_{\mu\nu}(\vartheta)$  ოპერატორის მოქმედებით აღიწერება, მაგრამ რა თქმა უნდა, როგორც წინა მაგალითებში, უნდა მოიძებნოს სპინორული ობიექტი რაზეც ის იმოქმედებს.  $\text{Mat}_2(\mathbb{H})$  ალგებრის მინიმალური მარცხენა იდეალი არის დირაკის სპინორი

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_3 & 0 & 0 & 0 \\ \psi_4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.77)$$

სადაც  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4 \in \mathbb{C}$ .

**ზოგადი კლიფორდის ალგებრა  $\mathbb{F}$  ველზე  $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{F})$** 

კლიფორდის ალგებრა  $\mathbb{F}$  ველზე  $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{F})$  ასოციატიური ალგებრაა და შემდეგი თანადობით განისაზღვრება

$$e_i e_j + e_j e_i = 2g_{ij}, \quad (2.78)$$

სადაც

$$i, j = 1, 2, \dots, q + p \quad (2.79)$$

და  $g_{ij}$  არის სივრცის დიაგონალური მეტრიკა  $(p, q)$  სიგნატურით,

$$g = \text{diag}(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_p, \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_q). \quad (2.80)$$

როგორც წრფივი სივრცე  $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{F})$  ალგებრა იზომორფულია  $2^{p+q}$  განზომილებიანი სივრცის

$$\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{F}^{2^{p+q}}. \quad (2.81)$$

ალგებრის სივრცის სტრუქტურას აქვს სახე

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{F}) = & \mathbb{F} \oplus \mathbb{F}^{p,q} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{F}^{\binom{p}{2} + \binom{q}{2}, \binom{p+q}{2} - \binom{p}{2} - \binom{q}{2}} \oplus \dots \\ & \dots \oplus \bigwedge^k \mathbb{F}^{\binom{p}{k} + \binom{q}{k}, \binom{p+q}{k} - \binom{p}{k} - \binom{q}{k}} \oplus \dots \oplus \bigwedge^{p+q} \mathbb{F}. \end{aligned} \quad (2.82)$$

$k$ -ური ქვესივრცის ზოგად ელემენტს ეწოდება  $k$ -ვექტორი

სკალარი:  $\mathbb{F} \ni x_0,$

ვექტორი:  $\mathbb{F}^{p,q} \ni x_1 e_1 + \dots + x_{p+q} e_{p+q},$

ბივექტორი:  $\bigwedge^2 \mathbb{F}^{\binom{p}{2} + \binom{q}{2}, \binom{p+q}{2} - \binom{p}{2} - \binom{q}{2}} \ni x_{12} e_{12} + x_{23} e_{23} + \dots,$

$\vdots$

$k$ -ვექტორი:  $\bigwedge^k \mathbb{F}^{\binom{p}{k} + \binom{q}{k}, \binom{p+q}{k} - \binom{p}{k} - \binom{q}{k}} \ni x_{123\dots\ell} e_{123\dots\ell} + \dots,$

$\vdots$

ფსევდოსკალარი:  $\bigwedge^{p+q} \mathbb{F} \ni x_{123\dots(p+q)} e_{123\dots(p+q)}.$

(2.83)

ქვესივრცე  $\mathbb{F}^{p,q}$  წარმომქმნელია, რადგან ამ სივრცის ელემენტების გეომეტრიული ნამრავლებით და მიღებული ობიექტების შეკრებით შეიძლება ალგებრის ნებისმიერი სხვა ელემენტის მიღება. აგრეთვე გამოყოფენ კენტად და ლუწად ქვესივრცეებს

$$\begin{aligned} \mathcal{C}\ell_{p,q}^+(\mathbb{F}) &= \mathbb{F} \oplus \bigwedge^2 \mathbb{F}^{\binom{p}{2}+\binom{q}{2}, \binom{p+q}{2}-\binom{p}{2}-\binom{q}{2}} \oplus \dots, \\ \mathcal{C}\ell_{p,q}^-(\mathbb{F}) &= \mathbb{F}^{p,q} \oplus \bigwedge^3 \mathbb{F}^{\binom{p}{3}+\binom{q}{3}, \binom{p+q}{3}-\binom{p}{3}-\binom{q}{3}} \oplus \dots. \end{aligned} \tag{2.84}$$

ლუწი ქვესივრცე ყოველთვის ალგებრულად ჩაკეტილია, რის გამოც ისინი ქმნიან ქვეალგებრას.

### კლიფორდის ალგებრების მატრიცული წარმოდგენა

ზემოთ განხილული იყო კლიფორდის ალგებრების მატრიცული წარმოდგენები 2 და 3 განზომილებიანი გეომეტრიული სივრცეებისათვის. ცხრილში 2.4 მოცემულია  $d = p + q < 8$  განზომილებიანი სივრცეების  $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})$  ალგებრების იზომორფიზმი მატრიცულ რგოლებთან. გამოყენებულია შემდეგი აღნიშვნა  ${}^m\mathbb{A}(N)$  რაც ბლოკ-დიაგონალური მატრიცაა  $m$  ცალი  $\text{Mat}_N(\mathbb{A})$  ბლოკით, ხოლო  $\mathbb{A}$  ჰურვიცის რომელიმე ასოციაციური ალგებრაა:  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  ან  $\mathbb{H}$ .

$q \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	$\mathbb{R}$	${}^2\mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	${}^2\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$
1	$\mathbb{C}$	$\mathbb{R}(2)$	${}^2\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	${}^2\mathbb{H}(4)$	
2	$\mathbb{H}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	${}^2\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$		
3	${}^2\mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	${}^2\mathbb{R}(8)$			
4	$\mathbb{H}(2)$	${}^2\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$				
5	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$	${}^2\mathbb{H}(4)$					
6	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$						
7	${}^2\mathbb{R}(8)$							

**ცხრ. 2.1:** მატრიცებსა და  $\mathcal{C}\ell_{p,q}(\mathbb{R})$  კლიფორდის ალგებრების იზომორფიზმი.

მაღალ განზომილებიანი  $d > 7$  ალგებრების მატრიცული წარმოდგენის მისა-

ღებად გამოიყენება შემდეგი ფორმულები

$$\mathcal{C}l_{p,q}(\mathbb{R}) \simeq \mathcal{C}l_{p-4,q+4}(\mathbb{R}) , \quad (2.85)$$

$$\mathcal{C}l_{p+8,q}(\mathbb{R}) \simeq \text{Mat}_{16}(\mathcal{C}l_{p,q}(\mathbb{R})) . \quad (2.86)$$

## თავი 3

# ორიგინალური შედეგები

### 3.1 არაკომპაქტური $G_2$ ჯგუფი

სპლიტ ოქტონიონური  $\mathbb{O}'$  ალგებრის ავტომორფიზმის ჯგუფი არის განსაკუთრებული ლის ჯგუფი სახელად არაკომპაქტური  $G_2$ . ეს ლის ჯგუფი 14 განზომილებიანია, რაც იმას ნიშნავს, რომ მისი ელემენტი 14 ნამდვილი პარამეტრით ხასიათდება და შესაბამისად მას გააჩნია 14 წარმომქმნელი. ეს წარმომქმნელები პირველად ელი კარტანმა დიფერენციალური ოპერატორების სახით დაწერა თავის თეზისში [Cartan 1894]. მათი ჩაწერა შეიძლება როგორც:

$$\begin{aligned} Y_{ij} &= y_i \frac{\partial}{\partial y_j} - z_j \frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_n \left( z_n \frac{\partial}{\partial z_n} - y_n \frac{\partial}{\partial y_n} \right), \\ Y_{k0} &= y_k \frac{\partial}{\partial t} - 2t \frac{\partial}{\partial z_k} + \frac{1}{2} \sum_{m,n} \epsilon_{mnk} \left( z_m \frac{\partial}{\partial y_n} - z_n \frac{\partial}{\partial y_m} \right), \\ Y_{0k} &= z_k \frac{\partial}{\partial t} - 2t \frac{\partial}{\partial y_k} + \frac{1}{2} \sum_{m,n} \epsilon_{mnk} \left( y_m \frac{\partial}{\partial z_n} - y_n \frac{\partial}{\partial z_m} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

სადაც ინდექსები იღებენ მნიშვნელობებს 1, 2, 3 ხოლო  $y_n, t, z_n \in \mathbb{R}$ . გამოსახულებებში (3.1) მოყვანილია 15 წარმომქმნელი, თუმცა  $Y_{11}, Y_{22}$  და  $Y_{33}$  არ არიან წრფივად დამოუკიდებლები რადგან

$$Y_{11} + Y_{22} + Y_{33} = 0. \quad (3.2)$$



წრფივად დამოუკიდებელ ბაზისში გადასასვლელად  $Y_{mn}$  წარმომქმნელი შეიძლება ჩანაცვლდეს

$$\begin{aligned} H_1 &= Y_{11} - Y_{22}, \\ H_2 &= \sqrt{3}Y_{33}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

რასაც კარტან-ვაილის ბაზისი ეწოდება.

არაკომპაქტური  $G_2$  ჯგუფის ნამდვილი სარწმუნო წარმოდგენებიდან უმცირესი 7 განზომილებიანი მატრიცებია, რომლებიც მოქმედებენ  $p \in \mathbb{R}^7$  ვექტორზე

$$p = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & t & z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}^T. \quad (3.4)$$

მატრიცულ წარმოდგენაში (3.1) წარმომქმნელების ჯგუფის  $\alpha$  პარამეტრებით შეწონილ წრფივ კომბინაციას შეიძლება დადგინდეს, რომ აქვს სახე:

$$\begin{aligned} Y &= \sum_k (\alpha_{0k} Y_{0k} + \alpha_{k0} Y_{k0}) + \sum_{m,n} \alpha_{mn} Y_{mn} \\ &= \begin{pmatrix} A(\alpha) & 2d & B(b) \\ -b^T & 0 & -d^T \\ B(d) & 2b & -A^T(\alpha) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

სადაც

$$b = \begin{pmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{20} & \alpha_{30} \end{pmatrix}^T, \quad (3.6)$$

$$d = \begin{pmatrix} \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} \end{pmatrix}^T, \quad (3.7)$$

$A$  არის  $SU(3)$  ჯგუფის წარმომქმნელების წრფივი კომბინაცია

$$A(\alpha) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2\alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33} & -3\alpha_{21} & -\alpha_{31} \\ -3\alpha_{12} & \alpha_{11} - 2\alpha_{22} + \alpha_{33} & -3\alpha_{32} \\ -3\alpha_{13} & -3\alpha_{23} & \alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

ხოლო  $B$  არის  $SO(3)$  ჯგუფის წარმომქმნელების წრფივი კომბინაცია

$$\begin{aligned}
 B(b) &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{30} & -\alpha_{20} \\ -\alpha_{30} & 0 & \alpha_{10} \\ \alpha_{20} & -\alpha_{10} & 0 \end{pmatrix}, \\
 B(d) &= \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{03} & -\alpha_{02} \\ -\alpha_{03} & 0 & \alpha_{01} \\ \alpha_{02} & -\alpha_{01} & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

არაკომპაქტური  $G_2$  ჯგუფის წარმომქმნელები ქმნიან მარტივ არაკომპაქტურ  $\mathfrak{g}_2$  ლის ალგებრას  $[\cdot, \cdot] : (a, b) \mapsto ab - ba$  კომუტატორის მიმართ. ამ ალგებრის კომუტაციური თანადობებია

$$\begin{aligned}
 [Y_{ij}, Y_{i'j'}] &= \delta_{ji'} Y_{ij'} - \delta_{ij'} Y_{i'j}, \\
 [Y_{ij}, Y_{0k}] &= -\delta_{ik} Y_{0j} + \frac{1}{3} \delta_{ij} Y_{0k}, \\
 [Y_{ij}, Y_{k0}] &= \delta_{jk} Y_{i0} - \frac{1}{3} \delta_{ij} Y_{k0}, \\
 [Y_{0k}, Y_{k'0}] &= 3Y_{k'k}, \\
 [Y_{k0}, Y_{k'0}] &= -2 \sum_{\ell} \epsilon_{kk'\ell} Y_{0\ell}, \\
 [Y_{0k}, X_{0k'}] &= -2 \sum_{\ell} \epsilon_{kk'\ell} Y_{\ell 0}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

ჯგუფის ზოგადი ელემენტი მატრიცული ფორმით მიიღება (3.5) მატრიცის ექსპონენციაციით.

ჯგუფის ინვარიანტულ კვადრატულ  $\mathcal{Q}_\eta : \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}$  ფორმას აქვს სახე:

$$\mathcal{Q}_\eta(p) = p^T \eta p, \tag{3.11}$$

სადაც

$$\eta = \left( \begin{array}{c|c|c} & & -\mathbf{1}_{3 \times 3} \\ \hline & -2 & \\ \hline -\mathbf{1}_{3 \times 3} & & \end{array} \right), \tag{3.12}$$

$$\mathbf{1}_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

ანუ სხვანაირად

$$\mathcal{Q}_\eta(p) = -t^2 - \sum_n z_n y_n. \quad (3.14)$$

### კვადრატული ფორმის დიაგონალიზება

რადგანაც საჭიროა არაკომპაქტური  $G_2$  ჯგუფის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია, მოსამებნია  $\mathbb{R}^7$  სივრცის ისეთი ბაზისის სადაც კვადრატული ფორმა იქნება დიაგონალური. სივრცის ბაზისის შეცვლა ლის ალგებრის დონეზე გამოიწვევს მსგავსების გარდაქმნას, რაც ქვემოთ არის ნაჩვენები. ამ ბაზისზე გადასვლა შესაძლებელია კოორდინატთა გარდაქმნით:

$$\begin{aligned} y_k &= \lambda_k + x_k, & \frac{\partial}{\partial y_k} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \\ z_k &= \lambda_k - x_k, & \frac{\partial}{\partial z_k} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_k} - \frac{\partial}{\partial x_k} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

მატრიცულად ეს ცვლადთა გარდაქმნა შეიძლება ჩაიწეროს როგორც:

$$q = \Omega p, \quad (3.16)$$

სადაც

$$\Omega = \Omega^T = \frac{1}{2} \left( \begin{array}{c|c|c} \mathbf{1}_{3 \times 3} & & \mathbf{1}_{3 \times 3} \\ \hline & 2 & \\ \hline \mathbf{1}_{3 \times 3} & & -\mathbf{1}_{3 \times 3} \end{array} \right), \quad (3.17)$$

და

$$q = \left( \lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ t \ x_1 \ x_2 \ x_3 \right)^T. \quad (3.18)$$

კვადრატული ფორმა (3.14) შეიცვლება როგორც:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_\eta(p) &= \mathcal{Q}_\eta(\Omega^{-1}q) \\ &= (\Omega^{-1}q)^T \eta \Omega^{-1}q \\ &= q^T (\Omega^{-1} \eta \Omega^{-1}) q, \end{aligned} \quad (3.19)$$

ხოლო  $g = \Omega^{-1} \eta \Omega^{-1}$  აღნიშვნის შემოტანით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \Omega_g(q) &= q^T g q \\ &= -\lambda^2 - t^2 + x^2 \end{aligned} \quad (3.20)$$

სადაც სივრცის მეტრიკაა

$$g = \text{diag}(-1, -1, -1, \underbrace{-1, +1, +1, +1}_{\text{მინოვსკის ქვესივრცე}}), \quad (3.21)$$

ხოლო

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ x^2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2. \end{aligned} \quad (3.22)$$

წარმომქმნელებისთვის  $\Omega$  იქნება მსგავსების გარდაქმნა

$$X = \Omega Y \Omega^{-1}. \quad (3.23)$$

ეს შეიძლება დამტკიცდეს ჯგუფის მხებ სივრცეში:

$$\exp(Y) \simeq \mathbf{1}_{7 \times 7} + Y, \quad (3.24)$$

სადაც  $Y^2$  უგულებელყოფადია. თუ უსასრულოდ მცირე გარდაქმნის წესში

$$p' = (1 + Y) p \quad (3.25)$$

ჩაისმევა ბაზისის (3.16) ცვლილებიდან გამოსახული

$$p = \Omega^{-1} q, \quad (3.26)$$

გამოვა

$$\Omega^{-1} q' = (1 + Y) \Omega^{-1} q, \quad (3.27)$$

საიდანაც

$$q' = (1 + \Omega Y \Omega^{-1}) q = (1 + X) q. \quad (3.28)$$

მსგავსების გარდაქმნის შემდეგ წარმომქმნელები ემორჩილებიან იმავე (3.10) კომუტაციურ თანადობებს. დიფერენციალური ოპერატორების წარმოდგენაში (3.1)

წარმომქმნელები იღებენ სახეს:

$$\begin{aligned}
X_{ij} &= \frac{1}{2} (\lambda_i + x_i) \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{2} (\lambda_j - x_j) \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
&\quad - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_n \left( \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n} + x_n \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \right), \\
X_{k0} &= \left( \lambda_k \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \right) + \left( x_k \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{m,n} \epsilon_{mnk} (\lambda_m - x_m) \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_n} + \frac{\partial}{\partial x_n} \right), \\
X_{0k} &= \left( \lambda_k \frac{\partial}{\partial t} - t \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \right) - \left( x_k \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{m,n} \epsilon_{mnk} (\lambda_m + x_m) \left( \frac{\partial}{\partial \lambda_n} - \frac{\partial}{\partial x_n} \right).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

### არაკომპაქტური $g_2$ ლის ალგებრის მოსახერხებელი ბაზისი

საბოლოოდ მისაღები კაზიმირის ოპერატორის გამოსახულების გამარტივების მიზნით მოსახერხებელია არაკომპაქტური  $g_2$  ლის ალგებრისთვის ახალი ბაზისის შემოღება:

$$\begin{aligned}
\Theta_k &= -X_{k0} + X_{0k}, \\
B_k &= -X_{k0} - X_{0k}, \\
\Phi_k &= X_{kk}, \\
\Gamma_k &= \sum_{m,n} |\epsilon_{mnk}| X_{mn}, \\
R_k &= \sum_{m,n} \epsilon_{mnk} X_{mn},
\end{aligned} \tag{3.30}$$

ალგებრის ამ ბაზისში (3.29) დიფერენციალურ ოპერატორებს აქვთ სახე:

$$\begin{aligned}
\Theta_k &= -2 \left( x_k \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x_k} \right) - \sum_{m,n} \epsilon_{mnk} \left( \lambda_m \frac{\partial}{\partial x_n} - x_n \frac{\partial}{\partial \lambda_m} \right), \\
\mathbf{B}_k &= -2 \left( \lambda_k \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \right) - \sum_{m,n} \epsilon_{mnk} \left( \lambda_m \frac{\partial}{\partial \lambda_n} - x_n \frac{\partial}{\partial x_m} \right), \\
\Gamma_k &= \sum_{m,n} |\epsilon_{mnk}| \left( x_m \frac{\partial}{\partial \lambda_n} + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_m} \right), \\
\mathbf{R}_k &= \sum_{m,n} \epsilon_{mnk} \left( \lambda_m \frac{\partial}{\partial \lambda_n} + x_n \frac{\partial}{\partial x_m} \right), \\
\Phi_k &= \left( x_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} + \lambda_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{3} \sum_n \left( x_n \frac{\partial}{\partial \lambda_n} + \lambda_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

საწყის ბაზისში დაბრუნება ხდება შემდეგნაირად:

$$\begin{aligned}
X_{0k} &= \frac{1}{2} (\Theta_k - \mathbf{B}_k), \\
X_{k0} &= \frac{1}{2} (\Theta_k + \mathbf{B}_k), \\
X_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_k (\epsilon_{ijk} \mathbf{R}_k + |\epsilon_{ijk}| \Gamma_k) + \delta_{ij} \Phi_i.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

მატრიცული წარმოდგენას ახალ ბაზისში აქვს სახე:

$$\begin{aligned}
&\sum_k (\vartheta_k \Theta_k + \beta_k \mathbf{B}_k + \gamma_k \Gamma_k + \rho_k \mathbf{R}_k + \varphi_k \Phi_k) = \\
&\begin{pmatrix} B(\rho) - B(\beta) & -2\beta & M(\gamma, \varphi) - 3B(\vartheta) \\ -2\beta^T & 0 & 2\vartheta^T \\ M(\gamma, \varphi) - 3B(\vartheta) & 2\vartheta & B(\rho) + B(\beta) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

სადაც  $\vartheta_k, \beta_k, \gamma_k, \rho_k, \varphi_k \in \mathbb{R}$ , მატრიცა  $B$  მოცემულია (3.9) ფორმულაში,

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}^T, \tag{3.34}$$

$$\vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & \vartheta_2 & \vartheta_3 \end{pmatrix}^T, \tag{3.35}$$

ხოლო  $M$  მატრიცა არის

$$M(\gamma, \varphi) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 & -3\gamma_3 & -3\gamma_2 \\ -3\gamma_3 & \varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_3 & -3\gamma_1 \\ -2\gamma_2 & -3\gamma_1 & \varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3 \end{pmatrix}. \quad (3.36)$$

კომუტაციური თანადობებია:

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}_i, \Gamma_j] &= - \sum_k |\epsilon_{ijk}| \Theta_k, \\ [\Theta_i, \Gamma_j] &= - \sum_k |\epsilon_{ijk}| \mathbf{B}_k, \\ [\Phi_i, \Gamma_j] &= - \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{R}_j, \\ [\mathbf{B}_i, \mathbf{R}_j] &= - \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{B}_k, \\ [\Theta_i, \mathbf{R}_j] &= - \sum_k \epsilon_{ijk} \Theta_k, \\ [\Phi_i, \mathbf{R}_j] &= - \sum_k \epsilon_{ijk} \Gamma_j, \\ [\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_j] &= \sum_k \epsilon_{ijk} (2\mathbf{B}_k - 3\mathbf{R}_k), \\ [\Theta_i, \Theta_j] &= \sum_k \epsilon_{ijk} (2\mathbf{B}_k + 3\mathbf{R}_k), \\ [\Theta_i, \mathbf{B}_j] &= - \sum_k (2\epsilon_{ijk} \Theta_k + 3|\epsilon_{ijk}| \Gamma_k), \\ [\Phi_i, \mathbf{B}_j] &= -\frac{1}{3} \sum_k |\epsilon_{ijk}| \Theta_j + \frac{2}{3} \delta_{ij} \Theta_j, \\ [\Phi_i, \Theta_j] &= -\frac{1}{3} \sum_k |\epsilon_{ijk}| \mathbf{B}_j + \frac{2}{3} \delta_{ij} \mathbf{B}_j, \\ [\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j] &= [\Gamma_i, \Gamma_j] = - \sum_k \epsilon_{ijk} \mathbf{R}_k, \\ [\Gamma_i, \mathbf{R}_j] &= \sum_k \epsilon_{ijk} \Gamma_k + 2\delta_{ij} \sum_{m,n} \epsilon_{jmn} (\Phi_n - \Phi_m), \\ [\mathbf{B}_j, \Theta_j] &= 6\Phi_j. \end{aligned} \quad (3.37)$$

## მეორე რიგის კაზიმირის ოპერატორი

2.2 ქვეთავში განხილული კაზიმირის ოპერატორის მოძებნის ალგორითმის (3.31) და (3.37) ალგებრისთვის გამოსაყენებლად დამატებით საჭიროა (3.3) კარტან-ვაილის ბაზისში გადასვლა, რათა წარმომქმნელები იყვნენ წრფივად დამოუკიდებელი, იმიტომ, რომ წინააღმდეგ შემთხვევაში კილინგის მეტრიკა (2.2) გამოვა გადაგვარებული. აგრეთვე საჭიროა (3.31) წარმომქმნელების მატრიცული წარმოდგენა (3.33).

კომპაქტურ  $\mathfrak{g}_2$  ლის ალგებრას გააჩნია  $p = 2$  და  $p = 6$  რიგის არანულოვანი კაზიმირის ოპერატორები, რომელთა სახე ალგებრის კონკრეტული ბაზისისთვის მოძებნილია [Bincer & Riesselmann 1993] სტატიაში. არაკომპაქტური  $\mathfrak{g}_2$  ლის ალგებრისთვის  $p = 2$  რიგის კაზიმირის ოპერატორს (3.29) და (3.31) ბაზისებში აქვს სახე:

$$\begin{aligned} C_2 &= 2 \sum_{i,j} X_{ij}^2 - \frac{2}{3} \sum_k (X_{k0} X_{0k} + X_{0k} X_{k0}) \\ &= \sum_k \left( \frac{1}{3} \Theta_k^2 - \frac{1}{3} B_k^2 + \Gamma_k^2 - R_k^2 + 2\Phi_k^2 \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

დიფერენციალური ოპერატორების შეტანით კი:

$$\begin{aligned} C_2 &= 6 \left( t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_k \left( \lambda_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \right) \\ &\quad + 2t \sum_k \left( x_k \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_k} + \lambda_k \frac{\partial^2}{\partial t \partial \lambda_k} \right) - \frac{2}{3} \sum_{i,j} \lambda_i x_j \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial x_j} \\ &\quad + \sum_{i,j,k} |\epsilon_{ijk}| \left( x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \lambda_i \lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} - \lambda_i^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_j^2} \right) \\ &\quad + x^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_k \frac{\partial^2}{\partial \lambda_k^2} \right) - t^2 \sum_k \left( \frac{\partial^2}{\partial \lambda_k^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right) - \lambda^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

სადაც  $x^2$  და  $\lambda^2$  განსაზღვრულია (3.22) ფორმულებში.

კაზიმირის (3.39) ოპერატორისთვის დაწერილი საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება

$$C_2 \psi = -m^2 \psi, \quad (3.40)$$

ინვარიანტულია არაკომპაქტური  $G_2$  გარდაქმნების მიმართ, ანალოგიურად კლიან-



გორდონის განტოლებისა, რომელიც პუანკარეს ჯგუფის გარდაქმნების მიმართ არის ინვარიანტული და წარმოადგენს პუანკარეს ალგებრის კაზიმირის ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას.

პირველი წევრი (3.39) ოპერატორში

$$c_1 = t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_k \left( \lambda_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \quad (3.41)$$

თავისთავად კომუტირებს (3.31) წარმომქმნელებთან, რის გამოც მის წინ კოეფიციენტი ნებისმიერად შეილება შეირჩეს, მაგალითად  $n$ -ს მაგივრად  $3$ . ზღვარში სადაც  $\lambda$  ცვლადები მუდმივივებია, (3.31) ოპერატორიდან ამ ცვლადებით ყველა წარმოებული გაქრება და დარჩება

$$C_2|_{\lambda=\text{const}} = C_{\text{Lorentz}} - \lambda^2 P_\mu P^\mu, \quad (3.42)$$

სადაც

$$P_\mu P^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \quad (3.43)$$

პუანკარეს ალგებრის კაზიმირის ოპერატორია, ხოლო

$$\begin{aligned} C_{\text{Lorentz}} = & 3 \left( t \frac{\partial}{\partial t} + \sum_k x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + x^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + t^2 \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \\ & + 2t \sum_k x_k \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_k} + \sum_{i,j,k} |\epsilon_{ijk}| \left( x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

(2.5) ფორმულაში მოყვანილი  $\mathfrak{so}(1, 3)$  ლორენცის ალგებრის კაზიმირის ოპერატორია ცხადი სახით.

$C_2|_{\lambda=\text{const}}$  ოპერატორი (3.42) შეიძლება განხილულ იქნას დამატებით ორ ზღვარში: როდესაც  $\lambda$  მცირე სიდიდეა იგი დაიყვანება ლორენცის  $\mathfrak{so}(1, 3)$  ალგებრის კაზიმირის ოპერატორზე (2.5, 3.44), ხოლო როდესაც  $\lambda$  დიდია – მაშინ პუანკარეს ალგებრის კაზიმირის ოპერატორზე (3.43).

### არაკომპაქტური $G_2$ გარდაქმნები

(3.33) ალგებრის მატრიცაში რომელიმე ერთი ცვლადს გარდა ყველას განულებით და შემდეგ ამ მატრიცის ექსპონენცირებით მიიღება ჯგუფის მატრიცა, რომელიც გაუნულებელი ცვლადით არის პარამეტრიზებული. მიღებული მატრიცის (3.18) ვექტორზე მოქმედებით ხორციელდება არაკომპაქტური  $G_2$  ლის ჯგუფის გარდაქმნა.  $\rho_k$  და  $\beta_k$  ცვლადებით პარამეტრიზებული  $n$  ცალი მატრიცა მობრუნებების მსგავს გარდაქმნებს აღწერს და ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შეიცავს, ხოლო  $\psi_k$ ,  $\varphi_k$  და  $\gamma_k$  ცვლადებით პარამეტრიზებული  $9$  ცალი მატრიცა კი ლორენცის ბუსტების მსგავს გარდაქმნებს შეესაბამება და ჰიპერბოლურ ტრიგონომეტრიულ ფუნქციებს შეიცავს.

- **მობრუნებები.**  $R_k$  წარმომქმნელების შესაბამისი სამი  $\rho_k$  პარამეტრი ეილერის კუთხეებია, რომლებიც ერთდროულად ატრიალებენ დროის მაგვარ  $(x_1, x_2, x_3)$  და  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  სივრცეებს. მაგალითად  $q' = \exp(\rho_1 R_1) q$  არის გარდაქმნა:

$$\begin{aligned}
 \lambda'_1 &= \lambda_1, \\
 \lambda'_2 &= \lambda_2 \cos \rho_1 + \lambda_3 \sin \rho_1, \\
 \lambda'_3 &= \lambda_3 \cos \rho_1 - \lambda_2 \sin \rho_1, \\
 t'_1 &= t_1, \\
 x'_1 &= x_1, \\
 x'_2 &= x_2 \cos \rho_1 + x_3 \sin \rho_1, \\
 x'_3 &= x_3 \cos \rho_1 - x_2 \sin \rho_1.
 \end{aligned}
 \tag{3.45}$$

$B_k$  წარმომქმნელების შესაბამისი სამი  $\beta_k$  პარამეტრი აგრეთვე კომპაქტური კუთხეებია, მაგრამ  $(x_1, x_2, x_3)$  და  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  სივრცეებში მობრუნებასთან ერთად ახდენს  $t$  დროის და  $\lambda_k$  დროის მაგვარ განზომილებას შორის კომპაქტურ

მობრუნებას ორმაგი კუთხით  $2\beta_k$ . მაგალითად  $q' = \exp(\beta_1 B_1) q$  არის:

$$\begin{aligned}
 \lambda'_1 &= \lambda_1 \cos(2\beta_1) - t \sin(2\beta_1), \\
 \lambda'_2 &= \lambda_2 \cos \beta_1 - \lambda_3 \sin \beta_1, \\
 \lambda'_3 &= \lambda_3 \cos \beta_1 + \lambda_2 \sin \beta_1, \\
 t'_1 &= t_1 \cos(2\beta_1) + \lambda_1 \sin(2\beta_1), \\
 x'_1 &= x_1, \\
 x'_2 &= x_2 \cos \beta_1 + x_3 \sin \beta_1, \\
 x'_3 &= x_3 \cos \beta_1 - x_2 \sin \beta_1.
 \end{aligned} \tag{3.46}$$

- **ბუსტები.**  $\Theta_k$  წარმომქმნელების შესაბამისი სამი პარამეტრი ლორენ ბუსტის ჰიპერბოლური კუთხეებია  $2\vartheta_k$ . თუმცა ეს გარდაქმნები არ არის სუფთა ლორენცის ბუსტები, რადგან მათთან ერთად აგრეთვე ხდება ორ-ორი კოორდინატის ( $i, j \neq k$ ) ჰიპერბოლური მობრუნება  $(x_1, x_2, x_3)$  და  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  სივრცეებს შორის. მაგალითად  $q' = \exp(\vartheta_1 \Theta_1) q$  არის:

$$\begin{aligned}
 \lambda'_1 &= \lambda_1, \\
 \lambda'_2 &= \lambda_2 \cosh \vartheta_1 + x_3 \sinh \vartheta_1 \\
 \lambda'_3 &= \lambda_3 \cosh \vartheta_1 - x_2 \sinh \vartheta_1, \\
 t'_1 &= t \cosh(2\vartheta_1) + x_1 \sinh(2\vartheta_1), \\
 x'_1 &= x_1 \cosh(2\vartheta_1) + t \sinh(2\vartheta_1), \\
 x'_2 &= x_2 \cosh \vartheta_1 - \lambda_3 \sinh \vartheta_1, \\
 x'_3 &= x_3 \cosh \vartheta_1 + \lambda_2 \sinh \vartheta_1.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

$\Phi_k$  წარმომქმნელების შესაბამისი სამი  $\varphi_k$  პარამეტრი ჰიპერბოლური კუთხეებია, რომლითაც ხდება  $(x_1, x_2, x_3)$  და  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  სივრცეებს შორის ბუსტი

კუთხის  $2/3$  და  $1/3$  ნაწილებით. მაგალითად  $q' = \exp(\vartheta_1 \Theta_1) q$  არის:

$$\begin{aligned}
 \lambda'_1 &= \lambda_1 \cosh\left(\frac{2}{3}\varphi_1\right) - x_1 \sinh\left(\frac{2}{3}\varphi_1\right), \\
 \lambda'_2 &= \lambda_2 \cosh\left(\frac{1}{3}\varphi_1\right) + x_2 \sinh\left(\frac{1}{3}\varphi_1\right), \\
 \lambda'_3 &= \lambda_3 \cosh\left(\frac{1}{3}\varphi_1\right) + x_3 \sinh\left(\frac{1}{3}\varphi_1\right), \\
 t'_1 &= t, \\
 x'_1 &= x_1 \cosh\left(\frac{2}{3}\varphi_1\right) - \lambda_1 \sinh\left(\frac{2}{3}\varphi_1\right), \\
 x'_2 &= x_2 \cosh\left(\frac{1}{3}\varphi_1\right) + \lambda_2 \sinh\left(\frac{1}{3}\varphi_1\right), \\
 x'_3 &= x_3 \cosh\left(\frac{1}{3}\varphi_1\right) + \lambda_3 \sinh\left(\frac{1}{3}\varphi_1\right),
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

$\Gamma$  წარმომქმნელების შესაბამისი სამი  $\gamma_k$  პარამეტრით აგრეთვე ხდება ჰიპერბოლური მობრუნება  $(x_1, x_2, x_3)$  და  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  სივრცეების ორ-ორი კოორდინატს ( $i, j \neq k$ ) შორის. მაგალითად  $q' = \exp(\gamma_1 \Gamma_1) q$  არის:

$$\begin{aligned}
 \lambda'_1 &= \lambda_1, \\
 \lambda'_2 &= \lambda_2 \cosh \gamma_1 - x_3 \sinh \gamma_1 \\
 \lambda'_3 &= \lambda_3 \cosh \gamma_1 - x_2 \sinh \gamma_1, \\
 t'_1 &= t, \\
 x'_1 &= x_1, \\
 x'_2 &= x_2 \cosh \gamma_1 - \lambda_3 \sinh \gamma_1, \\
 x'_3 &= x_3 \cosh \gamma_1 - \lambda_2 \sinh \gamma_1.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

### 3.2 კლიფორდის ალგებრა $\mathcal{Cl}_{4,4}(\mathbb{R})$

რადგანაც კლიფორდის ალგებრებთან მუშაობა უფრო ადვილია ვიდრე არაასოციატიურ ალგებრულ სტრუქტურებთან, სპინორები, ვექტორები, ფსევდოორთოგონალური ჯგუფები და ტრიალობა პირველად შესწავლილია მათი მეშვეობით.

ფსევდოევკლიდურ  $(4 + 4)$ -სივრცეში გეომეტრიული ობიექტების აღსაწერად მოსახერხებელია  $\mathcal{Cl}_{4,4}(\mathbb{R})$  კლიფორდის ალგებრის გამოყენება. ამ სივრცის მეტრიკა

$$g = \text{diag}(1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1) \quad (3.50)$$

აღნიშნული იქნება როგორც  $g_{\mu\nu}$ , სადაც ბერძნული ანბანის ინდექსები იღებენ მნიშვნელობებს  $0, 1, \dots, 7$ .  $\mathcal{Cl}_{4,4}(\mathbb{R})$  ალგებრა სხვა კლიფორდის ალგებრების მსგავსად ასოციატიურია. მისი განსაზღვრა შეიძლება ანტი-კომუტაციური თანადობით:

$$e_\mu e_\nu + e_\nu e_\mu = 2g_{\mu\nu}, \quad (3.51)$$

სადაც  $e_\mu$  არის  $(4 + 4)$ -სივრცის ფსევდოორთონორმირებული ბაზისის ერთეულები. გამოყენებული იქნება ამ ბაზისის ელემენტების  $e_\mu \mapsto \Gamma_\mu$  წარმოდგენა  $\Gamma_\mu \in \text{Mat}_{16 \times 16}(\mathbb{R})$  მატრიცებით, რომელთა სახის დადგენა შეიძლება  $\mathcal{Cl}_{8,0}(\mathbb{R})$  ალგებრის წარმომქმნელი მატრიცების [Gamba 1968] გამოყენებით, იმის გათვალისწინებით, რომ  $\mathcal{Cl}_{4,4}(\mathbb{R})$  ალგებრას გააჩნია ნამდვილი წარმოდგენა [Lounesto 2001]. მათი სახეა:

$$\Gamma_\mu = \left( \begin{array}{c|c} & \alpha_\mu \\ \hline (-1)^{\lfloor \mu/4 \rfloor} \alpha_\mu^T & \end{array} \right), \quad (3.52)$$

სადაც

$$\alpha_0 = \left( \begin{array}{c|c|c|c} -1 & & & \\ \hline & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline & & -1 & \\ \hline & & & -1 \\ \hline & & & & -1 \\ \hline & & & & & 1 \end{array} \right), \quad (3.53)$$

$$\alpha_1 = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & 1 & & \\ \hline 1 & & & \\ \hline & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline & -1 & & \\ & & -1 & \\ \hline & & & 1 \\ & & & 1 \end{array} \right), \quad (3.54)$$

$$\alpha_2 = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline 1 & & & -1 \\ \hline & 1 & & \\ & & & -1 \\ \hline & -1 & & \\ & & -1 & \end{array} \right), \quad (3.55)$$

$$\alpha_3 = \left( \begin{array}{c|c|c|c} & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & & & 1 \\ \hline & 1 & & \\ & & 1 & \end{array} \right), \quad (3.56)$$

$$\alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline & & & & 1 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.57)$$

$$\alpha_5 = \begin{pmatrix} & -1 & & \\ 1 & & & \\ \hline & & & 1 \\ & & & & 1 \\ \hline & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ \hline & & & & & -1 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

$$\alpha_6 = \begin{pmatrix} & & -1 & \\ & & & -1 \\ \hline 1 & & & & \\ & & & & 1 \\ \hline & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 \\ \hline & & & -1 & & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}, \quad (3.59)$$

$$\alpha_7 = \begin{pmatrix} & & -1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1 \\ 1 & & & & \\ & & & & -1 \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.60)$$

(4 + 4)-სივრცეში ვექტორები წარმოდგენილია მატრიცით

$$\chi = \sum_{\beta=0}^7 \chi_\beta \Gamma_\beta, \quad (3.61)$$

სადაც  $x_\beta \in \mathbb{R}$ . ამ მატრიცის თავის თავზე გამრავლებით ვიღებთ დიაგონალურ  $\mathcal{Q} : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$  კვადრატულ ფორმას

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\chi) &= \chi^2 \\ &= \mathbf{1}_{16 \times 16} (\chi_0^2 + \chi_1^2 + \chi_2^2 + \chi_3^2 - \chi_4^2 - \chi_5^2 - \chi_6^2 - \chi_7^2), \end{aligned} \quad (3.62)$$

სადაც ტოლობის მარჯვენა მხარეში იგულისხმება ერთეულოვან მატრიცზე გამრავლება. უწყვეტი გარდაქმნები, რომელთა მიმართაც (3.61) ფორმა ინვარიანტულია, ქმნიან  $SO(4, 4)$  ჯგუფს და აქვთ სახე:

$$\chi' = L_{\mu\nu}(\vartheta) \chi L_{\mu\nu}^{-1}(\vartheta), \quad (3.63)$$

სადაც  $\vartheta \in \mathbb{R}$  და

$$L_{\mu\nu}(\vartheta) = \exp\left(-\frac{1}{2}\vartheta \Gamma_\mu \Gamma_\nu\right). \quad (3.64)$$

ეს  $SO(4, 4)$  გარდაქმნები არიან ორი ტიპის: კომპაქტური და არა-კომპაქტური. კომპაქტური გარდაქმნები, რომლებიც ქმნიან  $SO(4) \oplus SO(4)$  ჯგუფს, ხორციელდება როდესაც  $L_{\mu\nu}$  მატრიცაში  $[\mu/4] = [\nu/4]$ . ხოლო არაკომპაქტურ გარდაქმნებს ადგილი აქვთ, როცა  $[\mu/4] \neq [\nu/4]$  და მსგავსად ლორენცის ჯგუფის ბუსტებისა ისინი არ არიან ჩაკეტილი გამრავლების მიმართ.

ამ ორი ტიპის გარდაქმნებზე დასაკვირვებლად საკმარისია ერთეულოვან ელე-



მენტზე მხები სივრცის შესწავლა. ამისთვის  $L_{\mu\nu}(\vartheta)$  მატრიცას ვშლით ტეილორის მწკრივად  $O(\vartheta^2)$  სიზუსტემდე

$$L_{\mu\nu}(\vartheta) \simeq 1 - \frac{1}{2}\vartheta\Gamma_\mu\Gamma_\nu. \quad (3.65)$$

იმ ფაქტის გამოყენებით, რომ  $L_{\mu\nu}^{-1} = L_{\nu\mu}$ , მხებ სივრცეში (3.63) ფორმულა დადის სახეზე:

$$\sum_\alpha \chi'_\alpha \Gamma_\alpha = \sum_\beta \left( \chi_\beta \Gamma_\beta - \frac{1}{2}\vartheta \chi_\beta (\Gamma_\mu \Gamma_\nu \Gamma_\beta + \Gamma_\beta \Gamma_\nu \Gamma_\mu) \right). \quad (3.66)$$

მაგალითად განვიხილოთ  $\Gamma_4\Gamma_5$ -სიბრტყეში ბრუნვა.  $\beta \neq 4, 5$  შემთხვევაში (3.66) ფორმულიდან (3.51) თანადობის გათვალისწინებით, მეორე წევრი ნულდება და შეგვიძლია ჩავწეროთ  $\chi'_\beta = \chi_\beta$ .  $\beta = 5$  შემთხვევაში (3.66) გამოსახულების მეორე წევრი გახდება  $\vartheta\chi_5\Gamma_5$ , რაც მოგვცემს  $\chi'_4 = \chi_4 + \vartheta\chi_5$ . მსგავსად  $\beta = 4$ -სთვის ვიღებთ  $\chi'_5 = \chi_5 - \vartheta\chi_4$ . რადგანაც ამ ორი კოორდინატის გარდაქმნისას მივიღეთ განსხვავებული ნიშანი, შესაბამის სასრულ გარდაქმნებში გვექნება ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

$$\begin{cases} \chi'_4 = \chi_4 \cos \vartheta + \chi_5 \sin \vartheta, \\ \chi'_5 = \chi_5 \cos \vartheta - \chi_4 \sin \vartheta, \\ \chi'_\beta = \chi_\beta. \end{cases} \quad \beta \neq 4, 5 \quad (3.67)$$

მსგავსად მივიღებთ სხვა კომპაქტურ გარდაქმნებს ანიზოტროპულ სიბრტყეებში. გარდაქმნები, რომლებითაც ხდება მაქსიმალური ანიზოტროპული ქვესივრცეების შერევა არიან არაკომპაქტური. მაგალითად, თუ იგივე გამოთვლებს ჩავატარებთ  $\mu = 0, \nu = 4$  შემთხვევისთვის, მივიღებთ

$$\begin{cases} \chi'_0 = \chi_0 \cosh \vartheta + \chi_4 \sinh \vartheta, \\ \chi'_4 = \chi_4 \cosh \vartheta + \chi_0 \sinh \vartheta, \\ \chi'_\rho = \chi_\rho. \end{cases} \quad \mu \neq 0, 4$$

სპინორებისთვისა და ტრიალობისთვის მნიშვნელოვან როლს შეასრულებს მატ-

რიცა  $B = \Gamma_4 \Gamma_5 \Gamma_6 \Gamma_7$  შემდეგი თვისების გამო:

$$\chi^T = B \chi B. \quad (3.68)$$

სპინორის მიღების სტანდარტული გზა არის იდემპოტენტის ( $F^2 = F$ ) პოვნა და მისგან მინიმალური მარცხენა იდეალის აგება მასზე ალგებრის ყველა ელემენტის მოქმედებით. მაგალითად,

$$F = \left( \begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & \mathbf{0}_{15 \times 15} \end{array} \right), \quad (3.69)$$

იდემპოტენტის მიღება შეიძლება შემდეგი გზით:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_{n+1} &= \frac{1}{2} (T_n + \Gamma_n T_n \Gamma_{4+n}), \\ F &= T_4, \end{aligned} \quad (3.70)$$

ხოლო სპინორი იქნება  $\eta \in \mathcal{Cl}_{4,4}(\mathbb{R}) F$ . რადგანაც  $\eta$  წარმოადგენს  $16 \times 16$  მატრიცის პირველ სვეტს, ამიტომ სიმარტივისთვის ის განხილული იქნება, როგორც  $16 \times 1$  მატრიცა. შეიძლება გამოიყოს  $\eta = \phi + \psi$  სპინორის კირალური ნაწილები

$$\begin{aligned} \phi &= \left( 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad \phi_0 \quad \phi_1 \quad \cdots \quad \phi_7 \right)^T, \\ \psi &= \left( \psi_0 \quad \psi_1 \quad \cdots \quad \psi_7 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right)^T. \end{aligned} \quad (3.71)$$

სპინორების გარდაქმნის წესი მოიცემა როგორც:

$$\eta' = L_{\mu\nu}(\vartheta) \eta, \quad (3.72)$$

რაც ქმნის  $SO(4, 4)$  ჯგუფის ორმაგ დამფარავ ჯგუფს  $Spin(4, 4)$ . ამ გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტული კვადრატული ფორმაა

$$\eta^T B \eta = \phi^T B \phi + \psi^T B \psi, \quad (3.73)$$

რისი დამტკიცებაც შეიძლება ისევ მხებ სივრცეში  $B$  მატრიცის (3.68) თვისების გა-

მოყენებით

$$\begin{aligned}
 \eta^T B \eta' &= \eta^T \left( 1 + \frac{1}{2} \vartheta \Gamma_\nu^T \Gamma_\mu^T \right) B \left( 1 + \frac{1}{2} \vartheta \Gamma_\mu \Gamma_\nu \right) \eta \\
 &= \eta^T B \left( 1 - \frac{1}{2} \vartheta \Gamma_\mu \Gamma_\mu \right) \left( 1 + \frac{1}{2} \vartheta \Gamma_\mu \Gamma_\nu \right) \eta \\
 &= \eta^T B \eta.
 \end{aligned} \tag{3.74}$$

(3.73) გამოსახულებიდან ადვილი შესამჩნევია, რომ (3.74) დამტკიცება მის ორივე წევრზე ცალ-ცალკე ვრცელდება, საიდანაც გამომდინარეობს, რომ  $Spin(4, 4)$  გარდაქმნების მიმართ კირალური სპინორები ერთმანეთს არ ერევა და მათი კვადრატული ფორმები  $\phi^T B \phi$  და  $\psi^T B \psi$  ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად ინახება.

(3.71) გამოსახულებიდან ჩანს, რომ კირალური სპინორების განზომილება, ისევე, როგორც  $\chi$  ვექტორის განზომილება არის 8. თუმცა ამის უკან იმალება უფრო დიდი სიმეტრია, რომლის დემონსტრირებისთვის საჭიროა სპინორის სხვა ბაზისის შემოღება, კერძოდ,

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\psi_0 - \psi_4 \\ -\psi_1 - \psi_5 \\ -\psi_2 - \psi_6 \\ -\psi_3 - \psi_7 \\ -\psi_3 + \psi_7 \\ \psi_2 - \psi_6 \\ -\psi_1 + \psi_5 \\ \psi_0 - \psi_4 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \\ \phi_0 - \phi_4 \\ \phi_1 + \phi_5 \\ \phi_2 + \phi_6 \\ \phi_3 + \phi_7 \\ -\phi_3 + \phi_7 \\ \phi_2 - \phi_6 \\ -\phi_1 + \phi_5 \\ \phi_0 + \phi_4 \end{pmatrix}. \tag{3.75}$$

ამ ბაზისში კირალური სპინორების კვადრატული ფორმები ხდება დიაგონალური და ემთხვევა ვექტორის კვადრატულ ფორმას (3.61)

$$\begin{aligned}
 \phi^T B \phi &= \phi_0^2 + \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 - \phi_4^2 - \phi_5^2 - \phi_6^2 - \phi_7^2, \\
 \psi^T B \psi &= \psi_0^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 + \psi_3^2 - \psi_4^2 - \psi_5^2 - \psi_6^2 - \psi_7^2.
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

ერთობლივი  $SO(4, 4)$  და  $Spin(4, 4)$  გარდაქმნების მიმართ არსებობს კიდევ

ერთი ინვარიანტული სამწრფივი  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$  ფორმა

$$\mathcal{F}(\phi, \chi, \psi) = \phi^T B \chi \psi, \quad (3.77)$$

რისი დამტკიცებაც ისევ მხებ სიბრტყეში შეგვიძლია

$$\begin{aligned} \phi'^T B \chi' \psi' &= \phi^T L_{\mu\nu}^T B L_{\mu\nu} \chi L_{\nu\mu} L_{\mu\nu} \psi \\ &= \phi^T \left(1 + \frac{1}{2} \vartheta \Gamma_\nu^T \Gamma_\mu^T\right) B \left(1 + \frac{1}{2} \vartheta \Gamma_\mu \Gamma_\nu\right) \chi \psi \\ &= \phi^T B \chi \psi. \end{aligned} \quad (3.78)$$

უფრო მნიშვნელოვანი და ღრმა სიმეტრიის დასაწახად მაგალითისთვის შეიძლება  $L_{01}(\vartheta)$  გარდაქმნაზე დაკვირვება

$$\begin{pmatrix} \phi'_0 = \phi_0 + \frac{1}{2} \vartheta \phi_1 \\ \phi'_1 = \phi_1 - \frac{1}{2} \vartheta \phi_0 \\ \phi'_2 = \phi_2 - \frac{1}{2} \vartheta \phi_3 \\ \phi'_3 = \phi_3 + \frac{1}{2} \vartheta \phi_2 \\ \phi'_4 = \phi_4 - \frac{1}{2} \vartheta \phi_5 \\ \phi'_5 = \phi_5 + \frac{1}{2} \vartheta \phi_4 \\ \phi'_6 = \phi_6 + \frac{1}{2} \vartheta \phi_7 \\ \phi'_7 = \phi_7 - \frac{1}{2} \vartheta \phi_6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \chi'_0 = \chi_0 - \vartheta \chi_1 \\ \chi'_1 = \chi_1 + \vartheta \chi_0 \\ \chi'_2 = \chi_2 \\ \chi'_3 = \chi_3 \\ \chi'_4 = \chi_4 \\ \chi'_5 = \chi_5 \\ \chi'_6 = \chi_6 \\ \chi'_7 = \chi_7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi'_0 = \psi_0 + \frac{1}{2} \vartheta \psi_1 \\ \psi'_1 = \psi_1 - \frac{1}{2} \vartheta \psi_0 \\ \psi'_2 = \psi_2 + \frac{1}{2} \vartheta \psi_3 \\ \psi'_3 = \psi_3 - \frac{1}{2} \vartheta \psi_2 \\ \psi'_4 = \psi_4 + \frac{1}{2} \vartheta \psi_5 \\ \psi'_5 = \psi_5 - \frac{1}{2} \vartheta \psi_4 \\ \psi'_6 = \psi_6 - \frac{1}{2} \vartheta \psi_7 \\ \psi'_7 = \psi_7 + \frac{1}{2} \vartheta \psi_6 \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

როგორც მოსალოდნელია, ერთი სრული ბრუნვი  $\chi$  ვექტორისთვის არის მხოლოდ ნახევარი ბრუნვი სპინორებისთვის  $\phi$  და  $\psi$ . აქ ყველა სიბრტყეში, გარდა იმისა რომელშიც ვექტორი ბრუნავს,  $\phi$  და  $\psi$  ბრუნავენ ერთმანეთის საპირისპირო მიმართულებით, რაც მათი ურთიერთსაპირისპირო კირალობის გამოხატვაა. თუმცა რადგანაც კირალური სპინორების და ვექტორის განზომილება ერთმანეთს ემთხვევა და  $L_{\mu\nu}$  მატრიცები ქმნიან ჯგუფს გამრავლების მიმართ, ამიტომ შესაძლებელია ისეთი გარდაქმნის აგება  $\chi$  ვექტორისთვის, რომელიც ზუსტად გაიმეორებს მაგალითად  $\phi$

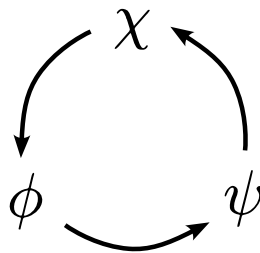
კირალური სპინორის (3.79) გარდაქმნას

$$\begin{aligned} & L_{10} \left( \frac{\vartheta}{2} \right) L_{23} \left( \frac{\vartheta}{2} \right) L_{54} \left( \frac{\vartheta}{2} \right) L_{67} \left( \frac{\vartheta}{2} \right) \\ & \simeq 1 - \frac{1}{4} \vartheta (\Gamma_1 \Gamma_0 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_5 \Gamma_4 + \Gamma_6 \Gamma_7), \end{aligned} \quad (3.80)$$

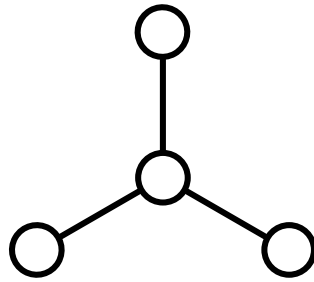
რაც გვაძლევს შემდეგ საინტერესო გარდაქმნას:

$$\begin{cases} \phi'_0 = \phi_0 + \frac{1}{2} \vartheta \phi_1 \\ \phi'_1 = \phi_1 - \frac{1}{2} \vartheta \phi_0 \\ \phi'_2 = \phi_2 + \frac{1}{2} \vartheta \phi_3 \\ \phi'_3 = \phi_3 - \frac{1}{2} \vartheta \phi_2 \\ \phi'_4 = \phi_4 + \frac{1}{2} \vartheta \phi_5 \\ \phi'_5 = \phi_5 - \frac{1}{2} \vartheta \phi_4 \\ \phi'_6 = \phi_6 - \frac{1}{2} \vartheta \phi_7 \\ \phi'_7 = \phi_7 + \frac{1}{2} \vartheta \phi_6 \end{cases}, \quad \begin{cases} \chi'_0 = \chi_0 + \frac{1}{2} \vartheta \chi_1 \\ \chi'_1 = \chi_1 - \frac{1}{2} \vartheta \chi_0 \\ \chi'_2 = \chi_2 - \frac{1}{2} \vartheta \chi_3 \\ \chi'_3 = \chi_3 + \frac{1}{2} \vartheta \chi_2 \\ \chi'_4 = \chi_4 - \frac{1}{2} \vartheta \chi_5 \\ \chi'_5 = \chi_5 + \frac{1}{2} \vartheta \chi_4 \\ \chi'_6 = \chi_6 + \frac{1}{2} \vartheta \chi_7 \\ \chi'_7 = \chi_7 - \frac{1}{2} \vartheta \chi_6 \end{cases}, \quad \begin{cases} \psi'_0 = \psi_0 - \vartheta \psi_1 \\ \psi'_1 = \psi_1 + \vartheta \psi_0 \\ \psi'_2 = \psi_2 \\ \psi'_3 = \psi_3 \\ \psi'_4 = \psi_4 \\ \psi'_5 = \psi_5 \\ \psi'_6 = \psi_6 \\ \psi'_7 = \psi_7 \end{cases}. \quad (3.81)$$

აქ ის არის ნიშანდობლივი, რომ  $\chi$  ვექტორმა და  $\phi$  და  $\psi$  სპინორებმა ციკლურად გაიცვალეს როლები, როგორც ნაჩვენებია დიაგრამაზე (სურ. 3.2). ეს წარმოადგენს 8 განზომილებიანი სივრცის თვისებას და მას ეწოდება *ტრიალობა*, მსგავსად *დუალობისა* ვექტორული სივრცეებისთვის.



**სურ. 3.1:** კირალური სპინორებისა და ვექტორის როლების გაცვლის თანმიმდევრობა  $L_{10}(\vartheta)$  გარდაქმნიდან (3.80) გარდაქმნაზე გადასვლისას.



**სურ. 3.2:**  $\mathfrak{so}(8)$  ლის ალგებრის შესაბამისი დინკინის დიაგრამა  $D_4$ .

ტრიალობა აგრეთვე უკავშირდება (სურ. 3.2)-ზე ნაჩვენებ  $\mathfrak{so}(8)$  და  $\mathfrak{so}(4, 4)$  ლის ალგებრების დინკინის დიაგრამას  $D_4$  [Lounesto 2001].

### 3.3 სპლიტ ოქტონიონური რიცხვები $\mathbb{O}'$

სპლიტ ოქტონიონები  $\mathbb{O}'$  წარმოადგენენ არაასოციატიურ ალგებრას, რომლის აგებაც შეიძლება როგორც კელი-დიქსონის კონსტრუქცია (2.11) და (2.12), სადაც თუ  $\mathbb{A}_0 = \mathbb{R}$ , ხოლო  $\gamma = -1$  ერთერთ ეტაპზე მაინც, მაშინ  $\mathbb{A}_3 \simeq \mathbb{O}'$ . მათი განსაზღვრა აგრეთვე შეიძლება საბაზისო ელემენტებისთვის მოცემული ალგებრული თანადობებით:

$$\begin{aligned}
 I^2 &= 1, & (\mathbb{C}' \text{ ქვეალგებრა}) \\
 j_m j_n &= -\delta_{mn} + \sum_{\ell=1}^3 \epsilon_{lmn} j_\ell, & (\mathbb{H} \text{ ქვეალგებრა}) \\
 j_n I &= J_n, & (3.82) \\
 J_m J_n &= \delta_{mn} + \sum_{\ell} \epsilon_{lmn} j_\ell, \\
 J_m j_n &= \delta_{mn} I - \sum_{\ell} \epsilon_{lmn} J_\ell,
 \end{aligned}$$

მარჯვენა და მარცხენა ალტერნატიულობი თვისებით

$$\begin{aligned}
 x(xy) &= (xx)y, \\
 (xy)y &= x(yy),
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

და მოქნილობის თვისებით

$$x(yx) = (xy)x \tag{3.84}$$

სადაც  $x, y \in \mathbb{O}'$ . ალგებრული თანადობების და ალტერნატიულობის თვისების გამოყენებით მიღებული საბაზისო ელემენტების გამრავლების ტაბულა მოყვანილია (ცხრ. 3.3)-ში.

	1	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$I$	$J_1$	$J_2$	$J_3$
1	1	$j_1$	$j_2$	$j_3$	$I$	$J_1$	$J_2$	$J_3$
$j_1$	$j_1$	-1	$j_3$	$-j_2$	$J_1$	$-I$	$-J_3$	$J_2$
$j_2$	$j_2$	$-j_3$	-1	$j_1$	$J_2$	$J_3$	$-I$	$-J_1$
$j_3$	$j_3$	$j_2$	$-j_1$	-1	$J_3$	$-J_2$	$J_1$	$-I$
$I$	$I$	$-J_1$	$-J_2$	$-J_3$	1	$-j_1$	$-j_2$	$-j_3$
$J_1$	$J_1$	$I$	$-J_3$	$J_2$	$j_1$	1	$j_3$	$-j_2$
$J_2$	$J_2$	$J_3$	$I$	$-J_1$	$j_2$	$-j_3$	1	$j_1$
$J_3$	$J_3$	$-J_2$	$J_1$	$I$	$j_3$	$j_2$	$-j_1$	1

**ცხრ. 3.3:**  $\mathbb{O}'$  სპლიტ ოქტონიონების გამრავლების ტაბულა.

ზოგადი სპლიტ ოქტონიონური რიცხვი  $x \in \mathbb{O}'$  და მისი სპლიტ ოქტონიონურად შეუღლებული  $\bar{x} \in \mathbb{O}'$  არიან

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + Ix_4 + \sum_n (j_n x_n + J_n x_{4+n}), \\
 \bar{x} &= x_0 - Ix_4 - \sum_n (j_n x_n + J_n x_{4+n}),
 \end{aligned}
 \tag{3.85}$$

სადაც  $x_0, x_1, \dots, x_7 \in \mathbb{R}$ .

რადგანაც ეს ალგებრა არასოციატიური და 8 განზომილებიანია, დიდი გამოსახულებების ალგებრული მანიპულირება რთულია, რის გამოც შექმნილი იქნა სპლიტ ოქტონიონებთან სამუშაო კომპიუტერული ალგებრული სისტემა გამოთვლების მაგალითებით [Gurchumelia 2023]. შემდეგი გამოთვლების დიდი ნაწილი ამ ბიბლიოთეკის გამოყენებით არის წარმოებული.

გამოთვლებისთვის მნიშვნელოვანია ის ფაქტი, რომ ალტერნატიულობა და მოქნილობა ვრცელდება შეუღლებულ ცვლადებზეც

$$\begin{aligned}
 \bar{x}(xy) &= (\bar{x}x)y, \\
 (x\bar{y})y &= x(\bar{y}y), \\
 \bar{x}(yx) &= (\bar{x}y)x,
 \end{aligned}
 \tag{3.86}$$

$x \in \mathbb{O}'$  სპლიტ ოქტონიონის ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები იქნება



აღნიშნული როგორც:

$$\begin{aligned} x_0 &= \operatorname{Re}(x), \\ \mathbf{x} &= \operatorname{Im}(x), \end{aligned} \quad (3.87)$$

სადაც  $x = x_0 + \mathbf{x}$ . შესაძლებელია ცალკეული  $u$  წარმოსახვითი ნაწილის შეუღლება, რაც  $\operatorname{conj}_u : \mathbb{O}' \rightarrow \mathbb{O}'$  ასახვით იქნება აღნიშნული და გამოითვლება როგორც:

$$\operatorname{conj}_u x = u^2 (u \bar{x} u). \quad (3.88)$$

რადგანაც შეუღლებები კომუტირებენ

$$\operatorname{conj}_u \circ \operatorname{conj}_v x = \operatorname{conj}_v \circ \operatorname{conj}_u x = \operatorname{conj}_{uv} x. \quad (3.89)$$

ასახვით  $\operatorname{conj}_J : \mathbb{O}' \rightarrow \mathbb{O}'$  იქნება აღნიშნული სამივე  $J_n$  წარმოსახვითი ნაწილის შეუღლება  $\operatorname{conj}_{J_1 J_2 J_3}$ , და ანალოგიურად  $\operatorname{conj}_j$ .

$x$  სპლიტ ოქტონიონის ნამრავლი მის შეუღლებულზე განსაზღვრავს  $\mathcal{Q} : \mathbb{O}' \rightarrow \mathbb{R}$  კვადრატულ ფორმას

$$\mathcal{Q}(x) = \bar{x}x, \quad (3.90)$$

რაც კომპონენტურად შეიძლება ჩაიწეროს როგორც:

$$\mathcal{Q}(x) = \sum_{n=0}^3 (x_n^2 - x_{4+n}^2). \quad (3.91)$$

ნამრავლის მიმართ (3.90) კვადრატულ ფორმას აქვს  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  და  $\mathbb{O}$  გაყოფადი ალგებრების ნორმის მსავსი შემდეგი თვისება: ყოველი  $x, y \in \mathbb{O}'$  წყვილისთვის

$$\mathcal{Q}(xy) = \mathcal{Q}(x) \mathcal{Q}(y). \quad (3.92)$$

კვადრატული ფორმის გამოყენებით შესაძლებელია სპლიტ ოქტონიონური  $x$  რიცხვის შებრუნებულის აგება, თუ  $\mathcal{Q}(x) \neq 0$  როგორც:

$$x^{-1} = \frac{\bar{x}}{\mathcal{Q}(x)}. \quad (3.93)$$

თუმცა  $\mathbb{O}'$  ალგებრაში არის ისეთი  $x \neq 0$  რიცხვები, რომელთათვისაც  $\mathcal{Q}(x) = 0$ . ასეთი  $x$  რიცხვისთვის მოიძებნება ისეთი  $y \neq 0$ , რომ  $xy = 0$ , რის გამოც  $x$  რიცხვს

ნულის გამყოფი ეწოდება. ნულის გამყოფის რამდენიმე მაგალითია

$$\begin{aligned} I^\pm &= \frac{1}{2} (1 \pm I), \\ G_n^\pm &= \frac{1}{2} (j_n \pm J_n), \end{aligned} \quad (3.94)$$

რომელთათვისაც სრულდება

$$\begin{aligned} I^+ I^- &= 0, \\ G_n^+ G_n^+ &= 0, \\ G_n^- G_n^- &= 0. \end{aligned} \quad (3.95)$$

რადგანაც  $\mathcal{Q}(x)$  არ არის დადებითად განსაზღვრული და ალგებრაში არსებობენ ნულის გამყოფები, სპლიტ ოქტონიონებისთვის,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{H}$  და  $\mathbb{O}$  ალგებრებისგან განსხვავებით, ვერ განისაზღვრება ნორმა. ამის გამო  $\mathbb{O}'$  არ წარმოადგენს ნორმიან გაყოფად ალგებრას.

კვადრატული ფორმის გამოყენებით განისაზღვრება სიმეტრიული და არაგადგარებული ორწრფივი ფორმა  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{O}' \times \mathbb{O}' \rightarrow \mathbb{R}$  როგორც:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{Q}(x + y) - \frac{1}{2} \mathcal{Q}(x) - \frac{1}{2} \mathcal{Q}(y). \quad (3.96)$$

ცხადი სახით ამ ფორმას აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \frac{1}{2} (\bar{x}y + \bar{y}x) \\ &= \sum_{n=0}^3 (x_n y_n - x_{4+n} y_{4+n}). \end{aligned} \quad (3.97)$$

დამტკიცების გარეშე მოყვანილია ხელსაყრელი იგივეობები

$$\mathcal{Q}(x) = \langle x, x \rangle, \quad (3.98)$$

$$\langle x, y \rangle = \operatorname{Re}(x\bar{y}), \quad (3.99)$$

$$\operatorname{Re}(\mathbf{xy}) = \frac{1}{2}(\mathbf{xy} + \mathbf{yx}), \quad (3.100)$$

$$\operatorname{Im}(\mathbf{xy}) = \frac{1}{2}(\mathbf{xy} - \mathbf{yx}), \quad (3.101)$$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = -\frac{1}{2}(\mathbf{xy} + \mathbf{yx}), \quad (3.102)$$

$$\langle xy, z \rangle + \langle y, xz \rangle = 2\operatorname{Re}(x) \langle y, z \rangle. \quad (3.103)$$

### სპლიტ ოქტონიონური გრადიენტი

სპლიტ ოქტონიონური  $f : \mathbb{O}' \rightarrow \mathbb{O}'$  ფუნქციებისთვის გრადიენტული ოპერატორებია

$$\partial = \frac{\partial}{\partial x} \quad (3.104)$$

და

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}. \quad (3.105)$$

როდესაც სპლიტ ოქტონიონური გრადიენტები მოქმედებენ

$$f(x) = x \quad (3.106)$$

და

$$f(x) = \bar{x} \quad (3.107)$$

წრფივ ფუნქციებზე, მაშინ მათ აქვთ თვისებები

$$\partial x = \bar{\partial} \bar{x} = 1, \quad (3.108)$$

$$\bar{\partial} x = \partial \bar{x} = 0, \quad (3.109)$$

თუ ისინი იქნება განმარტებული როგორც:

$$\partial = \frac{1}{2} \left( \partial_0 - \frac{j_1 \partial_1 + j_2 \partial_2 + j_3 \partial_3 - I \partial_4 - J_1 \partial_5 - J_2 \partial_6 - J_3 \partial_7}{7} \right), \quad (3.110)$$

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2} \left( \partial_0 + \frac{j_1 \partial_1 + j_2 \partial_2 + j_3 \partial_3 - I \partial_4 - J_1 \partial_5 - J_2 \partial_6 - J_3 \partial_7}{7} \right), \quad (3.111)$$

სადაც

$$\partial_n = \frac{\partial}{\partial x_n}. \quad (3.112)$$

თუმცა წარმოებულისთვის დამახასიათებელი თვისება, რომ

$$f(x) = x^n \quad (3.113)$$

ხარისხოვანი ფუნქციის წარმოებული გადაისახება

$$f'(x) = nx^{n-1} \quad (3.114)$$

ფუნქციაში, სპლიტ ოქტონიონებისათვის არ სრულდება  $n > 1$  შემთხვევაში.

გრადიენტების (3.110) და (3.111) განსაზღვრებებში ნამდვილი და წარმოსახვითი ნაწილები სხვადასხვა წონებით შედიან გრადიენტში, რის გამოც გამოყენებულია სხვა განამრტება, რომელიც აგრეთვე აკმაყოფილებს (3.108) და (3.109) თვისებებს,

$$\partial = \frac{1}{2} (\partial_0 + I \partial_4) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 (j_n \partial_n + J_n \partial_{4+n}), \quad (3.115)$$

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2} (\partial_0 - I \partial_4) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 (j_n \partial_n + J_n \partial_{4+n}). \quad (3.116)$$

იმის გამო, რომ სპლიტ ოქტონიონი არაკომუტაციურია, გრადიენტის დაწერისას საჭირო იქნება ოპერატორის მოქმედების მიმართულების მითითება. საზოგადოდ

$$\vec{\partial} f \neq f \overleftarrow{\partial}. \quad (3.117)$$

### 3.4 სპლიტ ოქტონიონური ველის თეორიები

სპლიტ ოქტონიონური  $\mathbb{O}' \rightarrow \mathbb{O}'$  ველებისთვის ლაგრანჟიანის ასაგებად საჭიროა ასახვები სპლიტ ოქტონიონებიდან  $\mathbb{R}$  ნამდვილ რიცხვებში. ასეთი ორი ასახვა კვადრატული (3.90) და ორწრფივი (3.96) ფორმებია. კიდევ ერთი ასეთი ფორმა, რომელიც მნიშვნელოვანი იქნება ლაგრანჟიანის ასაგებად, არის (3.77) სამწრფივი ფორმის სპლიტ ოქტონიონური წარმოდგენა  $\mathcal{F} : \mathbb{O}' \times \mathbb{O}' \times \mathbb{O}' \rightarrow \mathbb{R}$ , რომლის განმარტებაც (3.96) ორწრფივი ფორმის მეშვეობით შეიძლება:

$$\mathcal{F}(\phi, \chi, \psi) = \langle \bar{\phi}, \chi\psi \rangle, \quad (3.118)$$

რისი ცხადი სახეც გამოდის

$$\mathcal{F}(\phi, \chi, \psi) = \frac{1}{2}\phi(\chi\psi) + \frac{1}{2}(\bar{\psi}\bar{\chi})\bar{\phi}. \quad (3.119)$$

#### (4+4)-სივრცის სიმეტრიის ჯგუფების წარმოდგენა

კვადრატული  $\mathcal{Q}$  და სამწრფივი  $\mathcal{F}$  ფორმები (3.90) და (3.118), როგორც 3.2 პარაგრაფში იყო ნაჩვენები, არიან  $SO(4, 4)$  და  $Spin(4, 4)$  ფსევდოორთოგონალური ჯგუფების გარდაქმნის მიმართ ინვარიანტულები.  $SO(8)$  და  $Spin(8)$  ოქტონიონური ჯგუფების  $\mathbb{O}$  ოქტონიონური წარმოდგენის მსგავსად [Dray & Manogue], ფსევდოორთოგონალური ჯგუფების სპლიტ ოქტონიონური წარმოდგენა შეიძლება შემდეგი გარდაქმნების კომპოზიციით

$$\begin{aligned} \chi' &= T_{uv}(\vartheta)(u\chi u)T_{uv}(\vartheta) \\ \phi' &= u^2(\phi u)T_{uv}(s_u\vartheta) \\ \psi' &= u^2T_{uv}(s_u\vartheta)(u\psi) \end{aligned} \quad (3.120)$$

სადაც

$$T_{uv}(\vartheta) = \begin{cases} u \cos \frac{\vartheta}{2} + v \sin \frac{\vartheta}{2}, & u\bar{u} = v\bar{v}, \\ u \cosh \frac{\vartheta}{2} + v \sinh \frac{\vartheta}{2}, & u\bar{u} = -v\bar{v}. \end{cases} \quad (3.121)$$

ხოლო  $s_u \in \{-1, 1\}$  მოიძებნება როგორც:

$$s_u = |u\bar{u} - u^2| - 1. \quad (3.122)$$

### ლაგრანჟიანი

სამწრფივი (3.118) ფორმის გამოყენებით, შეიძლება ლაგრანჟიანის აგება თუ მოხდება  $\chi$  სპლიტ ოქტონიონის ჩანაცვლება მარჯვნივ მოქმედი (3.115) გრადიენტული ოპერატორით

$$\mathcal{L} = \langle \overleftarrow{\phi}, \overrightarrow{\partial} \psi \rangle. \quad (3.123)$$

შემდეგი ქმედების სტაციონარიზებით:

$$S = \int d^8x \mathcal{L}, \quad (3.124)$$

მიიღება მარჯვენა და მარცხენა ანალიზურობის პირობები  $\phi$  და  $\psi$  ველებზე

$$\begin{cases} \phi \overleftarrow{\partial} = 0, \\ \overrightarrow{\partial} \psi = 0. \end{cases} \quad (3.125)$$

მოცემული განტოლებები წარმოადგენენ კომი-რიმანის და კომი-რიმან-ფუტერის [Sudbery 1979] განტოლებების განზოგადებას სპლიტ ოქტონიონებისათვის. (3.125) გამოსახულებაში პირველი განტოლების სპლიტ ოქტონიონური შეუღლებით სისტემას იღებს სახეს

$$\begin{cases} \overrightarrow{\partial} \overleftarrow{\phi} = 0, \\ \overrightarrow{\partial} \psi = 0. \end{cases} \quad (3.126)$$

ლაგრანჟიანში კვადრატული წევრების დამატება

$$\mathcal{L} = \langle \overleftarrow{\phi}, \overrightarrow{\partial} \psi \rangle + \frac{1}{2} \lambda_1 \langle \phi, \phi \rangle + \frac{1}{2} \lambda_2 \langle \psi, \psi \rangle \quad (3.127)$$

იძლევა განტოლებების გადაბმას

$$\begin{cases} \overrightarrow{\partial} \overleftarrow{\phi} = \lambda_2 \psi, \\ \overrightarrow{\partial} \psi = -\lambda_1 \overleftarrow{\phi}. \end{cases} \quad (3.128)$$

თუ დაფიქსირდება  $\lambda_2 = 0$  კოეფიციენტი მაშინ ალტერნატიულობის თვისების

გამოყენებით (3.128) განტოლება დავა რვა ცალ დამოუკიდებელ ტალღურ (უმასო კლაინ-გორდონის) განტოლებაზე (4+4) სივრცეში

$$\langle \vec{\partial}, \vec{\partial} \rangle \psi = 0. \quad (3.129)$$

### 3.5 დირაკის და მაქსველის განტოლებები

დირაკის და მაქსველის განტოლებების მისაღებად საჭიროა ახალი  $D$  გრადი-  
ენტული ოპერატორის განსაზღვრა:

$$D = I\partial I. \quad (3.130)$$

ამ ოპერატორის  $j_n$  და  $J_n$  წარმოსახვით ნაწილებს აქვთ უარყოფითი ნიშანი

$$D = \frac{1}{2}(\partial_0 + I\partial_4) - \frac{1}{2} \sum_n (j_n \partial_n + J_n \partial_{4+n}). \quad (3.131)$$

აგრეთვე განხილულ იქნება ველები:

$$A = C_0 + j_1 \mathcal{A}_1 + j_2 \mathcal{A}_2 + j_3 \mathcal{A}_3 + I\mathcal{A}_0 + J_1 \mathcal{C}_1 + J_2 \mathcal{C}_2 + J_3 \mathcal{C}_3, \quad (3.132)$$

$$F = \vec{D}A. \quad (3.133)$$

ზემოთ განსაზღვრული (3.127) კვადრატულ ლაგრანჟიანში შემდეგი პარამეტ-  
რების ფიქსირებით

$$\lambda_2 = 0 \quad \text{და} \quad \lambda_1 = -1, \quad (3.134)$$

ველების ადებით

$$\phi = \bar{F} \quad (3.135)$$

და

$$\psi = A \quad (3.136)$$

და  $\partial$  ოპერატორის ნაცვლად  $D$  ოპერატორის გამოყენებით მიიღება

$$\mathcal{L} = \langle F, \vec{D}A \rangle - \frac{1}{2} \langle \bar{F}, \bar{F} \rangle. \quad (3.137)$$

$F$  ველის (3.133) განაზღვრების და

$$\langle \bar{F}, \bar{F} \rangle = \langle F, F \rangle, \quad (3.138)$$

ტოლობის გამოყენებით, ლაგრანჟიანი იღებს სახეს:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \langle F, F \rangle. \quad (3.139)$$



მისი მოძრაობის განტოლებაა

$$\langle \vec{D}, \vec{D} \rangle A = 0. \quad (3.140)$$

ზღვარში როცა

$$D \rightarrow \mathcal{D} = \frac{1}{2} (-j_1 \partial_x - j_2 \partial_y - j_3 \partial_z + I \partial_t) \quad (3.141)$$

განტოლება (3.140) დაიყვანება თავისუფალ დიონურ მაქსველის განტოლებაზე მინკოვსკის სივრცეში

$$\langle \vec{\mathcal{D}}, \vec{\mathcal{D}} \rangle A = 0, \quad (3.142)$$

სადაც  $\mathcal{A}_n$  და  $\mathcal{C}_n$  არიან ელექტრომაგნიტური და დიონური 4-პოტენციალები, რომელთა სპლიტ ოქტონიონური სახე პირველად [Chanyal, Bisht & Negi 2011, Chanyal 2014] სტატიაში იქნა შემოყვანილი.

$m$  მასის პარამეტრიანი

$$\mathcal{L} = \langle \bar{\phi}, \vec{D} \psi \rangle - \frac{1}{2} m \langle \bar{\phi}, J_3 \psi \rangle = \left\langle \bar{\phi}, \left( \vec{D} - \frac{1}{2} m J_3 \right) \psi \right\rangle, \quad (3.143)$$

ლაგრანჟიანის სტაციონარიზებით მიიღება შემდეგი ორი დამოუკიდებელი მოძრაობის განტოლება

$$\begin{cases} \left( \vec{D} - \frac{1}{2} J_3 m \right) \bar{\phi} = 0, \\ \left( \vec{D} - \frac{1}{2} J_3 m \right) \psi = 0, \end{cases} \quad (3.144)$$

რომელთაგანაც მეორე დადის დირაკის განტოლებაზე  $D \rightarrow \mathcal{D}$  ზღვარში.

აგრეთვე შესაძლებელია ლაგრანჟიანის დაწერა ერთი ველისთვის. თუ  $\phi = \bar{\psi} J_3$ , მაშინ მიიღება ლაგრანჟიანი

$$\mathcal{L} = \left\langle -J_3 \psi, \left( \vec{D} - \frac{1}{2} J_3 m \right) \psi \right\rangle, \quad (3.145)$$

რომელიც  $D \rightarrow \mathcal{D}$  ზღვარში დადის დირაკის ლაგრანჟიანის სპლიტ ოქტონიონურ ფორმაზე

$$\mathcal{L} = \left\langle -J_3 \psi, \left( \vec{\mathcal{D}} - \frac{1}{2} J_3 m \right) \psi \right\rangle. \quad (3.146)$$

ეს ლაგრანჟიანი ექვივალენტურია დირაკის ლაგრანჟიანის და შესაბამისად მისი მოძ-

რაობის განტოლებაც

$$\vec{\mathcal{D}}\psi = \frac{1}{2}J_3m\psi, \quad (3.147)$$

ექვივალენტურია დირაკის განტოლების.

ნიშანდობლივია, რომ (3.145) ლაგრანჟიანის შესაბამისი ქმედების სტაციონარიზებით მიღებული მოძრაობის განტოლება  $D \rightarrow \mathcal{D}$  ზღვარში არ იძლევა დირაკის განტოლებას. ამ ზღვარზე გადასვლა საჭიროა მოხდეს ლაგრანჟიანის დონეზე, იქამდე სანამ მოხდება ქმედების სტაციონარიზება, იმისთვის, რომ საბოლოოდ მიღებულ იქნას დირაკის განტოლება. მეორეს მხრივ (3.143) ლაგრანჟიანი არ არის დირაკის ლაგრანჟიანის ექვივალენტური, რადგანაც იგი შეიცავს დამატებით  $\phi$  ველს, მაგრამ ამ შემთხვევაში მნიშვნელობა არ აქვს  $D \rightarrow \mathcal{D}$  ზღვრის აღება მოხდება ლაგრანჟიანის დონეზე თუ მისი შესაბამისი ქმედების სტაციონარიზების შემდეგ განტოლების დონეზე, რადგანაც ორივე შემთხვევაში  $\psi$ -ს მიმართ მიიღება დირაკის განტოლების ექვივალენტური განტოლება, რომელიც ფორმულირებულია სპლიტ ოქტონიონების მეშვეობით.

დირაკის განტოლება გარეშე პოტენციურ  $A = j_1\mathcal{A}_1 + j_2\mathcal{A}_2 + j_3\mathcal{A}_3 + I\mathcal{A}_0$  ველში შესაძლებელია ჩაიწეროს, როგორც

$$\left(\mathcal{D} - \frac{1}{2}J_3m\right)\psi = \frac{1}{2}J_3(\text{conj}_{Ij}(A\psi)I). \quad (3.148)$$

### 3.6 სიგნალების ანალიზი

კომპიუტერების განვითარების შედეგად გაყოფადი ალგებრების გამოყენება მოსახერხებელი გახდა მონაცემთა ანალიზში, აეროკოსმონავტიკაში და სხვა პრაქტიკულ ამოცანებში, იმიტომ, რომ გაყოფადობის გამო გამოირიცხება მნიშვნელში ნულის გაჩენა.

მონაცემთა ანალიზისთვის შესაძლებელია გამოყენებულ იქნეს სპლიტ ოქტონიონებთან სამუშაო კომპიუტერული ალგებრის სისტემა [Gurchumelia 2023].

იქნა ნაწარმოები Mrk 501 აქტიური გალაქტიკის რენტგენული სპექტრის ანალიზი [Kapanadze, Gurchumelia & Aller 2023], რაც ძირითადად დაფუძნებულია 2021 წლის თებერვალ – 2022 დეკემბერში მიღებულ Swift-ის მონაცემებზე. წყარომ აჩვენა მკვეთრად გაძლიერებული რენტგენის აქტივობა, რომელიც ხასიათდება გრძელვადიანი ზრდით საბაზისო 0.3–10 KeV ნაკადის დონის მოკლევადიანი აფეთქებებით რამდენიმე კვირიდან დაახლოებით 2 თვემდე.

გარკვეული პერიოდის განმავლობაში, Mrk 501 იყო ყველაზე კაშკაშა ბლაზარი რენტგენის ცაში და, უფრო მეტიც, აჩვენა ინტენსიური დღის ცვალებადობა, რომელიც ზოგჯერ გამოვლინდა რამდენიმე ასეული წამის განმავლობაში გატარებული ექსპოზიციის ფარგლებში. ამ შემთხვევებს ახასიათებდა ფრაქციული ცვალებადობის ამპლიტუდები 4 – 18 პროცენტით და ძირითადად დაფიქსირდა მოკლევადიანი რენტგენის აფეთქებების დროს.

წყარომ აჩვენა ექსტრემალური სპექტრული თვისებები სპექტრული გამრუდების დომინირებით, მყარი ფოტონების ინდექსების ხშირი გამოჩენა 0.3–10 KeV და 0.3–300 GeV ზოლებში, სინქროტრონის სპექტრული ენერჯის განაწილების პიკი ხისტი რენტგენის დიაპაზონში.

ეს თვისებები მიუთითებს რელატივისტური მაგნიტური გადაერთების, სხვადასხვა შეზღუდვის ეფექტურობის მაგნიტურ ველში ფერმის პირველი რიგის მექანიზმის, სტოქასტური აჩქარებისა და ჰადრონული პროცესების მნიშვნელობაზე. რენტგენის და  $\gamma$ -სხივების ნაკადებმა აჩვენეს ლოგ-ნორმალური განაწილება, რაც მიანიშნებს ბლაზარის ჯეტის აკრეციული დისკის არასტაბილურობაზე, აგრეთვე ჰადრონული კასკადების და ნაწილაკების აჩქარების სიჩქარის შემთხვევითი რყევების შესაძლო არსებობაზე. ოპტიკურ-ულტრა-იისფერი და  $\gamma$ -სხივების ცვალებადო-

ბამ აჩვენა სუსტი ან არარსებული კორელაცია რენტგენის აფეთქების აქტივობასთან, რაც არ შეესაბამება მარტივ ლეპტონურ მოდელებს და მოითხოვს ნაწილაკების აჩქარების, ემისიის და ცვალებადობის უფრო რთულ სცენარებს.

## თავი 4

# დასკვნა

განხილული იყო  $\mathbb{O}'$  სკლიტ ოქტონიონური ალგებრის ავტომორფიზმის ჯგუფის, არაკომპაქტური  $G_2$ -ს გეომეტრიული ინტერპრეტაცია და მისი მსგავსება პუანკარეს ჯგუფთან. ნაჩვენები იქნა, რომ ტრანსლაციების არარსებობის მიუხედავად, შესაძლებელია მათი იმიტირება დამატებითი განზომილებების გამოყენებით. მოიძებნა შესაბამისი არაკომპაქტური  $\mathfrak{g}_2$  ლის ალგებრის მეორე რიგის კაზიმირის ოპერატორი. დამატებითი სამი  $\lambda$  განზომილების მუდმივობის შემთხვევაში კაზიმირის ოპერატორის დიფერენციალური სახე დადის ლორენცის  $\mathfrak{so}(1, 3)$  და პუანკარეს ალგებრების კაზიმირის ოპერატორების ჯამზე. დამატებით ზღვარში, სადაც  $\lambda$  დიდია, მიიღება პუანკარეს ალგებრის კაზიმირის ოპერატორი, ხოლო თუ  $\lambda$  მცირეა ლორენცის ალგებრის კაზიმირის ოპერატორი [Gogberashvili & Gurchumelia 2019].

ეგზოტიკური  $(4 + 4)$ -სივრცისთვის მოძებნილ იქნა ფსევდოორთოგონალური  $SO(4, 4)$  და  $Spin(4, 4)$  ლის ჯგუფების  $\mathbb{O}'$  სკლიტ ოქტონიონური წარმოდგენა და ჩაიწერა მათი ურთიერთცალსახა კავშირი ამ ჯგუფების კლიფორდის  $\mathcal{Cl}_{4,4}(\mathbb{R})$  გეომეტრიული ალგებრის მატრიცულ წარმოდგენასთან. აგრეთვე მოიძებნა ამ ჯგუფების ინვარიანტული სამწრფივი ფორმა, რომელიც განსაზღვრულია კირალურ სპინორებსა და ვექტორზე [Gurchumelia & Gogberashvili 2021, Gogberashvili & Gurchumelia 2023]. ფსევდოორთოგონალური ჯგუფის ინვარიანტული ორწრფივი და სამწრფივი ფორმების გამოყენებით აიგო ამ ჯგუფების სიმეტრიების მქონე ლაგრანჟიანი და გამოთვლილ იქნა მისი შესაბამისი მოძრაობის განტოლებები, რომლებიც გარკვეულ კერძო შემთხვევებში დადიან დირაკის ან მაქსელის განტოლებებზე [Gogberashvili & Gurchumelia 2023].

სპლიტ ოქტონიონებთან სამუშაოდ შეიქმნა SplitOct ბიბლიოთეკა, რომელიც შესაძლებელს ხდის რთული გამოთვლების კომპიუტერიზებას [Gurchumelia 2023]. იმავე ბიბლიოთეკის გამოყენება შესაძლებელია მონაცემთა ანალიზისთვის. გაკეთდა Mrk 501 აქტიური გალაქტიკის მონაცემების ანალიზი ხისტ რენტგენულ სპექტრში [Kapanadze, Gurchumelia & Aller 2023].

## დოქტორანტის გამოქვეყნებული ნაშრომების სია

- **Gogberashvili, M., & Gurchumelia, A. (2019). Geometry of the non-compact  $G(2)$ . *Journal of Geometry and Physics*, 144, 308-313.**
- Gogberashvili, M., & Gurchumelia, A. (2023). Dirac and Maxwell Systems in Split Octonions. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 11(7), 1977-1995.
- Gurchumelia, A., & Gogberashvili, M. (2021). Split Octonions and Triality in (4+4)-Space. *Recent Advances in Mathematical Physics, Proceeding of Science Regio 394*, 008 doi: 10.22323/1.394.0008;
- **Kapanadze, B., Gurchumelia, A., & Aller, M. (2023). Long-term X-ray outbursts in the TeV- detected blazar Mrk 501 in 2021-2022: further clues for the emission and unstable processes. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 268(1), 20.**

## მონაცემებზე და მასალებზე ხელმისაწვდომობა

SymPy კომპიუტერული ალგებრის სისტემაზე [Meuer et al 2017] დაფუძნებული დისერტანტის მიერ შექმნილ სპლიტ ოქტონიონებთან სამუშაო SplitOct პითონის ბიბლიოთეკა და მისი გამოყენებით Jupyter გარემოში [Granger & Grout 2016] წარმოებული გამოთვლები ხელმისაწვდომია შემდეგ მისამართზე

- Gurchumelia, A. (2023). SplitOct.  
<https://github.com/EQUINOX24/SplitOct>

# ლიტერატურა

Agricola, I. (2008). Old and New on the Exceptional Group  $G_2$ -The appearance of the simple complex Lie algebra of rank 2 and dimension 14 came as a surprise to its nineteenth century discoverer. The author tells the. *Notices of the American Mathematical Society*, 922-929.

Albert, A. A. (1942). Quadratic forms permitting composition. *Annals of Mathematics*, 161-177.

Baez, J. C., & Huerta, J. (2009). Division algebras and supersymmetry I. *Superstrings, geometry, topology, and  $C^*$ -algebras*, 81, 65-80.

Baez, J. C., & Huerta, J. (2011). Division algebras and supersymmetry II. *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, 15(5), 1373-1410.

Bekaert, Xavier, and Nicolas Boulanger. "The unitary representations of the Poincare group in any spacetime dimension." *SciPost Physics Lecture Notes* (2021): 030.

Bincer, A. M., & Riessellmann, K. (1993). Casimir operators of the exceptional group  $G_2$ . *Journal of mathematical physics*, 34(12), 5935-5941.



Błaszczyk, Ł. (2020). Discrete octonion Fourier transform and the analysis of discrete 3-D data. *Computational and Applied Mathematics*, 39(4), 329.

Bor, G., & Montgomery, R. (2009).  $G_2$  and the rolling distribution. *L'Enseignement Mathématique*, 55(1), 157-196.

Boya, L. J. (2003). Octonions and M-theory. In CONFERENCE SERIES-INSTITUTE OF PHYSICS (Vol. 173, pp. 245-248). Philadelphia; Institute of Physics; 1999. *arXiv preprint hep-th/0301037*.

Cartan E, (1894). Sur la structure des groupes de transformations finis et continus (These, Paris 1894), p. 146; *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* 31 (1914) 263; Reprinted in: *Oeuvres compl`etes* (Gauthier-Yillars, Paris 1952)

Castro, C. (2007). On the noncommutative and nonassociative geometry of octonionic space time, modified dispersion relations and grand unification. *Journal of Mathematical Physics*, 48(7).

Chanyal, B. C., Bisht, P. S., & Negi, O. P. S. (2011). Generalized split-octonion electrodynamics. *International Journal of Theoretical Physics*, 50, 1919-1926.

Chanyal, B. C. (2014). Octonion symmetric Dirac-Maxwell equations. *Turkish Journal of Physics*, 38(2), 174-186.

Chung, K. W., & Sudbery, A. (1987). Octonions and the Lorentz and conformal groups of ten-dimensional space-time. *Physics Letters B*, 198(2), 161-164.

Dixon, G. (1990). Derivation of the standard model. *Il Nuovo Cimento B* (1971-1996), 105(3), 349-364.

Dray, T., & Manogue, C. A. (2015). *The geometry of the octonions*. World Scientific.

Dzhunushaliev, V. (2006). A non-associative quantum mechanics. *Foundations of Physics Letters*, 19, 157-167.

Gamba, A. (1968). Representations and classes in groups of finite order. *Journal of Mathematical Physics*, 9(2), 186-192.

Gao, W. B., & Li, B. Z. (2021). The octonion linear canonical transform: Definition and properties. *Signal processing*, 188, 108233.

Georgi, H. (1999). *Lie algebras in Particle Physics: From isospin to unified theories* (Frontiers in Physics). Westview Press Incorporated.

Gogberashvili, M., & Gurchumelia, A. (2019). Geometry of the non-compact  $G(2)$ . *Journal of Geometry and Physics*, 144, 308-313.

Gogberashvili, M., & Gurchumelia, A. (2023). Dirac and Maxwell Systems in Split Octonions. *Journal of Applied Mathematics and Physics*, 11(7), 1977-1995.

Gogberashvili, M., & Sakhelashvili, O. (2015). Geometrical applications of split octonions. *Advances in Mathematical Physics*, 2015.

Gogberashvili, M. (2002). Observable algebra. arXiv preprint hep-th/0212251.

Gogberashvili, M. (2005). Octonionic geometry. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 15(1), 55-66.

Gogberashvili, M. (2006a). Octonionic version of Dirac equations. *International Journal of Modern Physics A*, 21(17), 3513-3523.

Gogberashvili, M. (2006b). Octonionic electrodynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(22), 7099.

Gogberashvili, M. (2016a). Octonionic geometry and conformal transformations. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 13(07), 1650092.

Gogberashvili, M. (2016b). Standard Model particles from split octonions. *Prog. Phys*, 12, 30.

Granger, B., & Grout, J. (2016). Jupyterlab: Building blocks for interactive computing. *Slides of presentation made at SciPy, 2016.*

Gruber, B., & O'Raiheartaigh, L. (1964). S theorem and construction of the invariants of the semisimple compact Lie algebras. *Journal of Mathematical Physics*, 5(12), 1796-1804.

Günaydin, M., Piron, C., & Ruegg, H. (1978). Moufang plane and octonionic quantum mechanics. *Communications in Mathematical Physics*, 61, 69-85.

Günaydin, M., & Gürsey, F. (1973). Quark structure and octonions. *Journal of Mathematical Physics*, 14(11), 1651-1667.

Gürsey, F., & Tze, C. H. (1996). *On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics.* World Scientific.

Gurchumelia, A., & Gogberashvili, M. (2021). Split Octonions and Triality in (4+4)-Space. *Recent Advances in Mathematical Physics, Proceeding of Science Regio 394*, 008

Gurchumelia, A. (2023). SplitOct.  
<https://github.com/EQUINOX24/SplitOct>

Hestenes, D., & Sobczyk, G. (2012). *Clifford algebra to geometric calculus: a unified language for mathematics and physics* (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Kapanadze, B., Gurchumelia, A., & Aller, M. (2023). Long-Term X-ray Outburst in the Tev-Detected Blazar Mrk 501 in 2021-2022: Further Clues for the Emission and Unstable Processes. *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, 268(1), 20.

Kauhanen, J., & Orelma, H. (2018). Cauchy-Riemann operators in octonionic analysis. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 28, 1-14.

Kugo, T., & Townsend, P. (1983). Supersymmetry and the division algebras. *Nuclear Physics B*, 221(2), 357-380.

Kuznetsova, Z., & Toppan, F. (2006). Superalgebras of (split-) division algebras and the split octonionic M-theory in (6, 5)-signature. *arXiv preprint hep-th/0610122*.

Liu, Q. H., L. H. Tang, and D. M. Xun. "Geometric momentum: The proper momentum for a free particle on a two-dimensional sphere." *Physical Review A* 84.4 (2011): 042101.

Lõhmus, J., Paal, E., & Sorgsepp, L. (1994). *Nonassociative algebras in physics*. (No Title).

Lõhmus, J., Paal, E., & Sorgsepp, L. (1998). About nonassociativity in mathematics and physics. *Acta Applicandae Mathematica*, 50, 3-31.

Lounesto, P. (2001). Clifford algebras and spinors. In *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics* (pp. 25-37). Dordrecht: Springer Netherlands.

Lukierski, J., & Toppan, F. (2002). Generalized space-time supersymmetries, division algebras and octonionic M-theory. *Physics Letters B*, 539(3-4), 266-276.

Meurer, A., Smith, C. P., Paprocki, M., Čertík, O., Kirpichev, S. B., Rocklin, M., ... & Scopatz, A. (2017). SymPy: symbolic computing in Python. *PeerJ Computer Science*, 3, e103.

Morita, K. (1981). Octonions, quarks and QCD. *Progress of Theoretical Physics*, 65(2), 787-790.

Okubo, S. (1995). *Introduction to octonion and other non-associative algebras in physics* (No. 2). Cambridge University Press.

Schray, J. (1994). *Octonions and supersymmetry* [PhD thesis, OregonState-University]. Oregon State University Libraries & Press, Scholars Archive. Retrieved from: <https://ir.library.oregonstate.edu/downloads/z603r155c>

Silagadze, Z. K. (1994). SO (8) Colour as possible origin of generations. *arXiv preprint hep-ph/9411381*.

Sudbery, A. (1979, March). Quaternionic analysis. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* (Vol. 85, No. 2, pp. 199-225). Cambridge University Press.

Sudbery, A. (1984). Division algebras,(pseudo) orthogonal groups and spinors. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 17(5), 939.

Tung, W. K. (1985). *Group theory in physics* (Vol. 1). World Scientific.

Zhevlakov, K. A. (1982). *Rings that are nearly associative*. Academic press.