ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

ՖԻԶԻԿԱՅԻ ՖԱԿՈՒԼՏԵՏ

ֆիզիկա ուսումնական ստորաբաժանում

ՏԵՍԱԿԱՆ ՖԻԶԻԿԱ ԿՐԹԱԿԱՆ ԾՐԱԳԻՐ

ՄԵԼԻՔ ՄՈՒՇԵՂԻ ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ՄԱԳԻՍՏՐՈՍԱԿԱՆ ԹԵԶ

ԲԱՐՁՐ ՍՊԻՆՈՎ ԴԱՇՏԵՐԻ ԽՈՐԱՆԱՐԴԱՅԻՆ ՓՈԽԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ AdS_{d+1} ՏԱՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆՈՒՄ ԲԱՑԱՀԱՅՏ ԿՈՎԱՐԻԱՆՏ ՏԵՍՔՈՎ

«Տեսական ֆիզիկա» մասնագիտությամբ մագիստրոսի որակավորման աստիճանի հայցման համար

ԵՐԵՎԱՆ 2020

Ուսանող՝ ____________________________________

ստորագրություն

Մելիք Կարապետյան

ազգանուն, անուն

Գիտական ղեկավար՝ ____________________________________

ստորագրություն

ֆ.մ.գ դոկտոր՝ Ռուբեն Մանվելյան

ազգանուն, անուն

«Թույլատրել պաշտպանության»

Ամբիոնի վարիչ՝ ____________________________________

ստորագրություն

ֆ.մ.գ դոկտոր, պրոֆեսոր՝ Արամ Սահարյան

ազգանուն, անուն

«   » Մայիս, 2020թ.

Բովանդակություն

1 Աբստրակտ

Այս աշխատանքը ուսումնասիրում է բարձր սպինային փոխազդեցության հիմնական անդամների կապը $d+2$ հարթ և AdS_{d+1} կոր տարածություններում, որը արտահայտվում է AdS_{d+1} տարածության կովարիանտ ածանցյալներով և կորության ուղղումներով: Աշխատանքում լուծվում են բոլոր անհրաժեշտ ռեկուրենտ հավասարումներն, և ավարտին է հասցվում բարձր սպինային խորանարդային փոխազդեցության հիմնական անդամի ռադիալ պրոեկտման ($Radial \quad pullback$) պրոցեդուրան՝ $d+2$ տարածությունից AdS_{d+1} տարածություն: Ռեկուրենտ հավասարումների ոչ տրիվյալ լուծումներն հնարավորություն են տալիս AdS_{d+1}-ում ստանալ փոխազդեցության բոլոր անդամներն՝ ներառյալ հետքեր և դիվերգենցիաներ պարունակող անդամներն:

2 Ներածություն

Փոխազդող Բարձր Սպինային(ԲՍ) տրամաչափային տեսությունների կառուցումը մեծ հետաքրքրություն է սկսել առաջացնել ավելի քան 30 տարի առաջ [52] : Պարբերաբար կարելի է տեսնել աճող հետաքրքրություն այս թեմայի շուրջ: Արվում են բազմաթիվ փորձեր կապելու AdS_{d+1} կամ հարթ տարածության խորանարդային փոխազդեցությունը AdS/CFT-ի և ԲՍ գրավիտացիայի հետ տարբեր չափողականություններում: Այս փորձերը միշտ եղել են գրավիչ այն իմաստով, որ հանդիսացել են որպես ալտերնատիվ տարբերակ կապելու քվանտային տեսությունը Հարաբերականության հատուկ տեսության հետ, ուսումնասիրելու ԲՍ տրամաչափային դաշտերն գրավիտացիային զուգահեռ և հասկանալու գրավիտացիայի դերը և յուրահատկությունը համեմատած ԲՍ եռարխիայի այլ դաշտերի հետ: Քանի որ այս աշխատանքում ուսումնասիրվում է խորանարդային փոխազդեցությունը, հարկ է նշել որ, չնայած այն բանի որ փոխազդող ԲՍ դաշտերի շարժման հավասարումներն հայտնի են երկար տարիներ [2] , այդ տեսությունների փոքրագույն գործողության սկզբունքը մնում է անհայտ: Փոխազդող լագրանժիան կառուցելու ստանդարտ մեթոդը կայանում է նրանում, որ պետք է զարգացնել Ֆրոնզդալի ֆորմալիզմը [10] ազատ դաշտերի համար: Այս ամենի կարևոր կետը կայանում է նրանում, որ երբ կատարում ենք ազատ դաշտերի պերտուրբատիվ դեֆորմացիա Նյոտերի մեթոդով, ապա դրան զուգահեռ ստանում ենք նաև այդ դաշտերի տրամաչափային ձևափոխությունների դեֆորմացիաներ և այլ բարդությունների՝ կապված տեսության լոկալության հետ, որը առաջանում է խորանարդային կարգից ավելի բարձր անդամներում:(տես [11]-[16]): Խորանարդային փոխազդեցությունը մինչև այժմ հանդիսանում է ԲՍ փոխազդեցությունների կառուցման հիմնական միավորը: Հարկ է նշել որ, չնայած այն բանի որ, խորանարդային փոխազդեցությունը AdS տարածությունում ուսումնասիրվել է տարիներ առաջ [42]-[46], սակայն AdS_{d+1} կովարիանտ ածանցյալների լեզվով շարադրված տեսությունը հայտնի չէ մինչ այժմ: Մյուս կողմից Նյոտերի պրոցեդուրան AdS-ում բավականին դժվար է, քանի որ այնտեղ կովարիանտ ածանցյալներն կոմուտատիվ չեն: Հետևաբար միակ տարբերակը գտնելու այս փոխազդեցությունը AdS-ում դա օգտագործելն է [46]-ում առաջարկվող մեթոդը:

Աշխատանքի հիմնական նպատակն է [46] ռադիալ պրոեկցման ($Radial\quad pullback$) ֆորմալիզմի միջոցով ստանալ խորանարդային փոխազդեցությունը AdS_{d+1}-օգտագործելով համապատասխան փոխազդեցությունը $d+2$ տարածությունում: [46]-ում փոխազդեցության անդամներն ներկայացված են AdS_{d+1}-ի կովարիանտ ածանցյալներով: Այդ ամենը արված է միայն հիմնական անդամի և հետք չպարունակող կորության ուղղումների համար:

Այս աշխատանքում հաջողվել է լուծել բոլոր անհրաժեշտ ռեկուրենտ հավասարումներն և ներկայացնել փոխազդեցությունը AdS_{d+1}-ում ներառյալ բոլոր կարգի կորության ուղղումներն, բոլոր հեփքերով: Մյուս կարևոր կեպը այն է, որ կառուցվել է ռադիալ պրոեկցման մեթոդ որը թույլ է փալիս ԲՍ փրամաչափային դաշտերի բարձր կարգի ածանցյալներ պարունակող անդամներ $d+2$-ից փանել AdS_{d+1}:

3 Ռադիալ պրոեկցման ($Radial \quad pullback$) մեթոդը և ազատ ԲՍ տրամաչափային դաշտերը AdS-ում

Այս բաժնում կարճ կներկայացնենք ռադիալ պրոեկցման ($Radial \quad pullback$) մեթոդը, որը կառուցվել է [48, 49] և օգտագործվել ազատ ԲՍ դաշտերի դեպքի համար [46]-ում:

Դիտարկենք d+2 չափանի հարթ տարածություն X^A կոորդինատներով և հարթ $SO(1, d$+$1)$ ինվարիանտ մետրիկայով:

$$X^A \quad A = 1, 2, \dots . d + 2, \tag{3.1}$$

$$ds^2 = \eta_{AB} dX^A dX^B = -(dX^{d+2})^2 + (dX^{d+1})^2 + dX^i dX^j \eta_{ij}, \tag{3.2}$$

Որպեսզի կառուցենք Էվկլիդյան AdS_{d+1} հիպերսֆերան այս տարածության մեջ, մտցնենք հետևյալ կորագիծ կոորդինատական ձևափոխությունները՝ $X^A \to (u, r, x^i)$:

$$\begin{aligned} X^{d+2} &= \frac{1}{2} e^u [r + \frac{1}{r}(L^2 + x^i x^j \eta_{ij})], \\ X^{d+1} &= \frac{1}{2} e^u [r - \frac{1}{r}(L^2 - x^i x^j \eta_{ij})], \\ X^i &= e^u L \frac{x^i}{r}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$-e^{2u} L^2 = -(X^{d+2})^2 + (X^{d+1})^2 + X^i X^j \eta_{ij}, \tag{3.4}$$

$$ds^2 = L^2 e^{2u} [-du^2 + \frac{1}{r^2}(dr^2 + dx^i dx^j \eta_{ij})]. \tag{3.5}$$

Դնելով $e^u = 1$ պայման, կոորդինատական ձևափոխությունների փոխարեն ստանում ենք $d + 2$ տարածության պրոեկցիան AdS_{d+1}-ի վրա հետևյալ լոկալ կոորդինատներով՝ $x^\mu = (x^0, x^i) = (r, x^i)$: Այլ կերպ ասած կարող ենք սահմանել ձևափոխության յակոբիանը հետևյալ կոմպակտ տեսքով՝

$$E^A_\mu(u, x^\nu) = \frac{\partial X^A}{\partial x^\mu} = e^u e^A_\mu(x^\nu), \tag{3.6}$$

$$E^A_u(u, x^\nu) = \frac{\partial X^A}{\partial u} = X^A(u, x^\nu) = e^u L n^A(x^\nu), \tag{3.7}$$

որտեղ (3.4)-ից հետևում է որ փանգենցյալ՝ $\{e^A_\mu(x)\}^d_{\mu=0}$ և նորմալ՝ $n^A(x)$ վեկտորներն բավարարում են հետևյալ առնչություններին՝

$$n^A(x) e^B_\mu(x) \eta_{AB} = 0 \tag{3.8}$$

$$n^A(x) n^B(x) \eta_{AB} = -1 \tag{3.9}$$

AdS_{d+1} փարածության համար, սահմանենք ինդուկցված մետրիկա $g_{\mu\nu}(x)$ և կորություն՝ $K_{\mu\nu}(x)$

$$g_{\mu\nu}(x) = e^A_\mu(x) e^B_\nu(x) \eta_{AB} = \left(\frac{L}{x^0}\right)^2 \delta_{\mu\nu} \tag{3.10}$$

$$\partial_\mu e^A_\nu(x) = \Gamma^\lambda_{\mu\nu}(g) e^A_\nu(x) + K_{\mu\nu}(x) n^A(x) \tag{3.11}$$

որտեղ՝

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(g) = \Gamma^{\lambda(AdS)}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\mu g_{\nu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}\right), \tag{3.12}$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{g_{\mu\nu}}{L} \tag{3.13}$$

Այսփեղից երևում է, որ $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(g)$-ները սովորական Կրիսփոֆելի սիմվոլներն են AdS_{d+1} -ում և հեփևաբար կարելի է սահմանել կովարիանփ ∇_μ ածանցյալներ այդ փարածությունում և (3.10) գրել հեփևյալ փեսքով՝

$$\nabla_\mu e^A_\nu(x) = K_{\mu\nu}(x) n^A(x) \tag{3.14}$$

$$K_{\mu\nu}(x) = e^A_\nu(x) \partial_\mu n_A = -n_A \nabla_\mu e^A_\nu(x) \tag{3.15}$$

Որպեսզի սահմանափակենք մեր $d+2$ հարթ փեսությունը AdS_{d+2} հիպերսֆերայի վրա, պետք է նախ և առաջ ներկայացնել $d+2$ փեսությունը կորագիծ կորդինատներով և հետևյալ հարթ մետրիկայով՝ $e^{2u}(AdS_{d+1} \times \mathcal{R}_u)$

$$ds^2 = e^{2u}[-L^2 du^2 + g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu] = G_{uu}(u) du^2 + G_{\mu\nu}(u,x) dx^\mu dx^\nu, \tag{3.16}$$

որտեղ

$$G_{uu}(u) = E^A_u(u,x^\nu) E^B_u(u,x^\nu) \eta_{AB} = X^A X_A = -L^2 e^{2u} \tag{3.17}$$

$$G_{\mu\nu} = E^A_\mu(u,x^\nu) E^B_\nu(u,x^\nu) \eta_{AB} = e^{2u} g_{\mu\nu}(x) \tag{3.18}$$

այնուհետև պետք է սահմանել ճիշտ ալգորիթմ, որով հնարավոր կլինի անցում կատարել հետևյալ յակոբիանով տրված E^A_u, E^A_μ հարթ կորագիծ տարածությունից դեպի համապատուն բացասական կորություն ունեցող տարածություն: Ճանապարհին պետք է ազատվել նորմալ n^A-ի ուղղությամբ կոմպոնենտներից: Սա անելու համար նախ սահմանենք դիֆերենցման կանոնները Ֆրենե բազիսի համար օգտագործելով (3.13)-(3.15)

$$\nabla_\mu e^A_\nu(x) = \frac{g_{\mu\nu}(x)}{L} n^A(x) \tag{3.19}$$

$$\partial_\mu n^A(x) = \frac{1}{L} e^A_\mu(x), \tag{3.20}$$

Հաշվելով կովարիանտ ածանցյալների կոմուտատորը, կստանանք Ռիմանի կորությունը և Ռիչի թենզորը:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]e^A_\lambda = R_{\mu\nu,\lambda}{}^\rho e^A_\rho = K_{\lambda[\nu}K^\rho_{\mu]}e^A_\rho \tag{3.21}$$

$$R_{\mu\nu,\lambda}{}^\rho = -\frac{1}{L^2}(g_{\mu\lambda}\delta^\rho_\nu - g_{\nu\lambda}\delta^\rho_\mu) \tag{3.22}$$

$$R_{\mu,\lambda} = -\frac{d}{L^2}g_{\mu\nu}, \quad R = g^{\mu\lambda}R_{\mu\lambda} = -\frac{d(d+1)}{L^2} \tag{3.23}$$

ԲՍ դաշտերի հետ ավելի հեշտ աշխատելու համար մտցնենք հետևյալ նշանակումներն՝ բոլոր $h^{(s)}_{A_1A_2\ldots A_s}(X)$ տեսքի սիմետրիկ թենզորների փոխարեն կօգտագործենք հետևյալ բազմանդամներ

$$h^{(s)}(X;a) = \sum_{A_i}(\prod_{i=1}^{s} a^{A_i})h^{(s)}_{A_1A_2\ldots A_s}(X). \tag{3.24}$$

Այնուհետև կարող ենք արտահայտել սիմետրիզացված գրադիենտը, հետքը և դիվերգենցիան: [1]

$$Grad : h^{(s)}(X;a) \Rightarrow Gradh^{(s+1)}(X;a) = a^A\partial_A h^{(s)}(X;a), \tag{3.25}$$

$$Tr : h^{(s)}(X;a) \Rightarrow Trh^{(s-2)}(X;a) = \frac{1}{s(s-1)}\Box_a h^{(s)}(X;a), \tag{3.26}$$

$$Div : h^{(s)}(X;a) \Rightarrow Divh^{(s-1)}(X;a) = \frac{1}{s}\eta^{AB}\partial_A\partial_{a^B}h^{(s)}(X;a). \tag{3.27}$$

Այնուհետև սահմանենք հետևյալ նշանակումներն՝ $\overset{s}{*}_a, \overset{s}{*}_b, \ldots$ թենզորների սիմետրիկ a կամ b ինդեքսներով փաթույթների համար

$$\overset{s}{*}_{a^A} = \frac{1}{(s!)^2}\prod_{i=1}^{s}\overleftarrow{\partial}_{a^{A_i}}\eta^{A_iB_i}\overrightarrow{\partial}_{a^{B_i}}. \tag{3.28}$$

Որպեսզի կատարենք ճիշտ անցում հարթ տարածությունից դեպի մեկ չափողականություն ավելի փոքր AdS տարածություն, նախ ֆիքսենք երկու կարևոր կետ՝

- Պետք է ֆիքսել $d+2$ տարածության ԲՍ դաշտի անզացը այնպես որ, ստանանք մեկ s սպինով դաշտից ճիշտ մեկ s սպինով դաշտ AdS_{d+1}-ում. Վերջինս բավարարելու համար բնական է զրոյացնել ներդրված հիպերսֆերային նորմալ բոլոր կոմպոնենտներն:

$$n^A h^{(s)}_{AA_2\ldots A_s}(u,x^\nu) \sim X^A(u,x^\nu)h^{(s)}_{AA_2\ldots A_s}(u,x^\nu) = 0 \tag{3.29}$$

- Հավելյալ a^A վեկտորը հաստատուն է հարթ տարածությունում:

$$\begin{aligned} a^A =& E^A_u(u,x)a^u(u,x^\nu) + E^A_\mu(u,x)a^\mu(u,x^\nu) \\ =& e^u\left(Ln^A(x)a^u(u,x) + e^A_\mu(x)a^\mu(u,x)\right) \end{aligned} \tag{3.30}$$

$$\partial_B a^A = 0, \tag{3.31}$$

[1] Որպեսզի հեշտ տարբերակենք a և X տարածություններն մենք օգտագործում ենք ∂_A տարածաժամանակային $\frac{\partial}{\partial X^A}$ ածանցյալների համար և ∂_a՝ a տարածությունում ածանցյալների համար:

իսկ AdS_{d+1}-ում ոչ, քանի որ հնարավոր չէ ստանալ հաստատուն կովարիանտ վեկտորներ կոր տարածություններում:

Այս ամենից կարելի է անել հետևություն, որ ԲՍ դաշտի անզացը իրենով բավարար չէ, որպեսզի կատարենք հաստատուն a^A վեկտորներով փաթաթված ածանցյալների փուլբեք անցում դեպի AdS_{d+1} տարածություն: Մյուս կողմից ունենք կորագիծ մետրիկա (3.16)-(3.18), որից կարող ենք հաշվել հակադարձ մետրիկան և հակադարձել Յակոբիանը (3.6)-(3.7)

$$G^{uu}(u,x) = -\frac{e^{-2u}}{L^2} \tag{3.32}$$

$$G^{\mu\nu}(u,x) = e^{-2u}g^{\mu\nu}(x) \tag{3.33}$$

$$E^u_A(u,x) = E^B_u(u,x)\eta_{AB}G^{uu}(u,x) = -\frac{e^{-u}}{L}n_A(x) \tag{3.34}$$

$$E^\mu_A(u,x) = E^B_\nu(u,x)\eta_{AB}G^{\mu\nu}(u,x) = e^{-u}e^\mu_A(x), \tag{3.35}$$

որտեղ $g^{\mu\nu}(x)$-ն AdS_{d+1}- հակադարձ մետրիկան է և $e^\mu_A(x) = e^B_\nu(x)\eta_{AB}g^{\mu\nu}(x)$. Այս ամենը նկատի ունենալով հարթ տարածության ածանցյալը կորդինատական ձևափոխություններից հետո կնդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\partial_A = E^u_A(u,x)\partial_u + E^\mu_A(u,x)\partial_{x^\mu} = -\frac{e^{-u}}{L}n_A(x)\partial_u + e^{-u}e^\mu_A(x)\partial_{x^\mu} \tag{3.36}$$

Այժմ տեղադրենք ստացվածը (3.31)-ի մեջ և հաշվի առնելով (3.30), (3.19) և (3.20) կստանանք հետևյալ չորս առնչություններն $a^u(u,x), a^\mu(u,x)$ կոմպոնենտների համար:

$$\partial_u a^u(u,x) + a^u(u,x) = 0 \tag{3.37}$$

$$\partial_u a^\mu(u,x) + a^\mu(u,x) = 0 \tag{3.38}$$

$$\partial_\mu a^u(u,x) + \frac{1}{L^2}a_\mu(u,x) = 0 \tag{3.39}$$

$$\nabla_\mu a^\nu(u,x) + \delta^\nu_\mu a^u(u,x) = 0 \tag{3.40}$$

Առաջին երկու հավասարումներն լուծվում են անմիջապես՝

$$a^u(u,x) = e^{-u}a^u(x) \tag{3.41}$$

$$a^\mu(u,x) = e^{-u}a^\mu(x) \tag{3.42}$$

Տեղադրելով այս լուծումներն (3.30)-ում և օգտագործելով (3.29) պայմանը, կորագիծ կորդինատներով անզացը կնդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned} h^{(s)}(X,a^B) &= h^{(s)}_{A_1A_2\ldots A_s}(X)a^{A_1}a^{A_2}\ldots a^{A_s}|_{X^A=(u,x^\mu),n^Ah^{(s)}_{A\ldots}=0} \\ &= h^{(s)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_s}(u,x)a^{\mu_1}(x)a^{\mu_2}(x)\ldots a^{\mu_s}(x) = h^{(s)}(u,x,a^\mu(x)) \end{aligned} \tag{3.43}$$

որտեղ

$$h^{(s)}_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_s}(u,x) = h^{(s)}_{A_1A_2\ldots A_s}(u,x)e^{A_1}_{\mu_1}(x)e^{A_2}_{\mu_1}(x)\ldots e^{A_s}_{\mu_s}(x) \tag{3.44}$$

Ստացվածը s սպինով թենզորական դաշտի $d+2$ չափանի փարածությունից AdS_{d+1} փարածություն անցնելու ճիշտ փուլբեք պրոցեդուրան է: Միակ կախումը հարթ փարածության կորդինատներից (3.44)-ում է:

s սպինով դաշտի զրո կարգի տրամաչափային վարիացիան ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\delta_{(0)}h^{(s)}(X^A;a^A) = s(a^A\partial_A)\epsilon^{(s-1)}(X^A;a^A), \tag{3.45}$$

որտեղ տրամաչափային պարամետրը անհետք է, իսկ դաշտը կրկնակի անհետք:

$$\Box_{a^A}\epsilon^{(s-1)}(X^A;a^A) = 0, \tag{3.46}$$

$$\Box^2_{a^A}h^{(s)}(X^A;a^A) = 0 \tag{3.47}$$

Միավորելով (3.30) և (3.36) ու հաշվի առնելով (3.42) կստանանք՝

$$a^A\partial_A\epsilon^{(s-1)}(X^A;a^A) = e^{-u}\left(a^u(x)\partial_u + a^\mu(x)\partial_{x^\mu}\right)\epsilon^{(s-1)}(u,x;a^\mu(x)) \tag{3.48}$$

որտեղ $\epsilon^{(s-1)}(X^A;a^A)$ պարամետրը բավարարում է նույն անզացին ինչ որ $h^{(s)}(X^A;a^A)$ ՝ (3.43)-ում:

$$\epsilon^{(s-1)}(X^A;a^A) = \epsilon^{(s-1)}(u,x;a^\mu(x)) \tag{3.49}$$

Հաջորդ կարևոր դիտարկումներն կապված են $\partial_{x^\mu} \equiv \partial_\mu$ ածանցյալների հետ՝ AdS_{d+1}-ում, x^μ կորդինատներով:

- Մենք համապատասխանության մեջ ենք դրել հարթ փարածության մեջ որոշված սկալյար օբյեկտը (որը X կորդինատներից կախված թենզորի և հաստատուն a^A վեկտորների փաթույթ է) կոր փարածությունում որոշված սկալյար օբյեկտի հետ (որը որ x կորդինատներից կախված վեկտոր է՝ փաթաթված x-ից կախված $a^\mu(x)$ վեկտորների հետ): Արդյունքում (3.48)-ի աջ կողմում ստանում են սովորական ածանցյալ՝ ∂_{x^μ}

- Որպեսզի տեսնենք AdS_{d+1}-ում կովարիանտ ածանցյալի տեսքը, պետք է օգտագործենք Լեյբնիցի կանոնը կոր փարածությունում և (3.39), (3.40):

$$\begin{aligned}\partial_{x^\mu}(T_\nu(x)a^\nu(x)) &= \nabla_\mu T_\nu(x)a^\nu(x) + T_\nu(x)\nabla_\mu a^\nu(x) \\ &= (\nabla_\mu T_\nu(x))a^\nu(x) - T_\mu(x)a^u(x) = (\nabla_\mu T_\nu(x))a^\nu(x) - a^u(x)\frac{\partial}{\partial a^\mu}(T_\nu(x)a^\nu)\end{aligned} \tag{3.50}$$

Այս օրինակից կարող ենք տեսնել, որ x-ից կախյալ վեկտորների փոխարեն կարող ենք օգտագործել x-ից կախում չունեցող a^μ վեկտորներ(ինչպես նաև a^u կոմպոնենտը) և բաժանել AdS տարածությունը a^μ տարածությունից: Վերջինս իրագործելու համար (3.50)-ին համապատասխան պետք է փոխարինենք սովորական ածանցյալներն հետևյալ օպերատորներով Փրենե բազիսում՝

$$\partial_A \quad => \quad (e^{-u}\partial_u, e^{-u}\partial_\mu), \tag{3.51}$$

$$\partial_\mu \quad => \quad D_\mu = \nabla_\mu - a^u\partial_{a^\mu} - \frac{a_\mu}{L^2}\partial_{a^u}, \tag{3.52}$$

որտեղ ∇_μ-ն AdS-ի կովարիանտ ածանցյալն է կառուցված այդ տարածության Կրիստոֆելի սիմվոլներով (3.12)

$$\nabla_\mu h^{(s)}(u,x;a) = \nabla_\mu h_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_s}(u,x)a^{\mu_1}a^{\mu_2}\ldots a^{\mu_s}. \tag{3.53}$$

Օգտագործելով վերը ստացածները (3.48) ներկայացնենք հետևյալ կերպ՝

$$a^A\partial_A\epsilon^{(s-1)}(X^A;a^A) = e^{-u}\left(a^u\partial_u + a^\mu D_\mu\right)\epsilon^{(s-1)}(u,x;a^\mu)$$
$$= e^{-u}\left[a^u(\partial_u - s + 1) + a^\mu\nabla_\mu\right]\epsilon^{(s-1)}(u,x;a^\mu) \tag{3.54}$$

Այնուհետև u կախվածության վրա դնենք հետևյալ պայմաններն դաշտերի և պարամետրերի համար՝

$$h^{(s)}(u,x^\mu;a^\mu) = e^{\Delta_h u}h^{(s)}(x^\mu;a^\mu), \tag{3.55}$$

$$\epsilon^{(s-1)}(u,x^\mu;a^\mu) = e^{\Delta_\epsilon u}\epsilon^{(s-1)}(x^\mu;a^\mu), \tag{3.56}$$

և օգտագործելով (3.45) կստանանք՝

$$e^{\Delta_h u}\delta h^{(s)}(x^\mu;a^\mu) = e^{(\Delta_\epsilon-1)u}s\left[a^u(\Delta_\epsilon - s + 1) + a^\mu\nabla_\mu\right]\epsilon^{(s-1)}(x;a^\mu). \tag{3.57}$$

Ստացվեց որ, որպեսզի AdS_{d+1}-ում ստանանք d+2-ի (3.45) տրամաչափային ձևափոխությունը պետք է օգտագործենք՝

$$\delta h^{(s)}(x^\mu;a^\mu) = sa^\mu\nabla_\mu\epsilon^{(s-1)}(x;a^\mu) \tag{3.58}$$

և պետք է ֆիքսենք անզացի վերջին ազատ պարամետրը՝

$$\Delta_\epsilon = s - 1 \tag{3.59}$$

$$\Delta_h = \Delta_\epsilon - 1 = s - 2 \tag{3.60}$$

Վերջինս համաձայնության մեջ է [42]-[45]:

Ամփոփելով այս ամենը, ռադիալ պրոեկտման ($Radial \quad pullback$) մեթոդը կարելի է գրել հետևյալ կերպ՝

1. Բացել բոլոր a^A վեկտորներն օգտագործելով AdS-ի Ֆրենե բազիսը համաձայն (3.30)-ի և հաշվի առնել u-ից (3.41)-(3.42)-ի կախվածություններն ներդրված հիպերսֆերայի նորմալ և տանգենցյալ բաղադրիչների համար (որոնք որ ստացվում են (3.31)-ից) և վերը նկարագրված x^μ-ից անկախ լինելու փաստը: Վերջապես ունենք հետևյալ ներդրման կանոնը՝

$$a^A => Ln^A(x)a^u + e^A_\mu(x)a^\mu \tag{3.61}$$

2. Փոխարինել բոլոր ածանցյալներն հետևյալ կերպ՝

$$\partial_A => e^{-u}\left(-\frac{n_A(x)}{L}\partial_u + e^\mu_A(x)D_\mu\right) \tag{3.62}$$

որտեղ D_μ սահմանված է՝ (3.52)-ում:

3. Ֆիքսել u պարամետրը տրամաչափային դաշտի և իր պարամետրի համար հետևյալ կերպ՝ (3.59)-(3.60), որպեսզի պահպանվի տրամաչափային ինվարիանտությունը ռադիալ պրոեկտման ($Radial \quad pullback$) ժամանակ:

$d+2$ չափանի տրամաչափային ինվարիանտ Ֆրոնզդալի թենզորը ունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{(s)}(X^A;a^A) \qquad &= \Box_{d+2}h^{(s)}(X^A;a^A) - a^A\partial_A\Big(\partial^B\partial_{a^B}h^{(s)}(X^A;a^A) \\ &-\frac{1}{2}(a^B\partial_B)\Box_{a^A}h^{(s)}(X^A;a^A)\Big),\end{aligned} \tag{3.63}$$

իսկ AdS_{d+1}-ում այն կնդունի հետևյալ տեսքը՝

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}^{(s)}(x;a^\mu) = \Box_{d+1}h^{(s)}(x^\mu;a^\mu) \\ &-(a^\mu\nabla_\mu)\Big[(\nabla^\nu\partial_{a^\nu})h^{(s)}(x;a^\mu) - \frac{1}{2}(a^\nu\nabla_\nu)\Box_{a^\mu}h^{(s)}(x;a^\mu)\Big] \\ &-\frac{1}{L^2}[s^2+s(d-5)-2(d-2)]h^{(s)}(x^\mu;a^\mu)) - \frac{1}{L^2}a^\mu a_\mu\Box_{a^\mu}h^{(s)}(x^\mu;a^\mu).\end{aligned} \tag{3.64}$$

Վերջիններս կապված են հետևյալ օրենքով՝

$$\mathcal{F}^{(s)}(X^A;a^A) \quad = \quad e^{(s-4)u}\mathcal{F}^{(s)}(x;a^\mu), \tag{3.65}$$

Օգտագործելով ստացվածը (3.55)-ի և (3.60)-ի հետ, ինտեգրման ծավալի համար կստանանք՝

$$\int d^{d+2}X = \int dud^{d+1}x\sqrt{-G} = L\int dud^{d+1}x\sqrt{g}e^{(d+2)u} \tag{3.66}$$

Ֆրոնզդալի գործողության համար կստանանք հետևյալը՝

$$S_0[h^{(s)}(X^A;a^A)] \quad = \quad \left[L\int due^{(d+2s-4)u}\right] \times S_0[h^{(s)}(x^\mu;a^\mu)], \tag{3.67}$$

որտեղ

$$
\begin{aligned}
S_0[h^{(s)}(X^A;a^A)] &= \int d^{d+2}X\Big[-\frac{1}{2}h^{(s)}(X^A;a^A) *_{a^A} \mathcal{F}^{(s)}(X^A;a^A) \\
&+ \frac{1}{8s(s-1)}\Box_{a^A}h^{(s)}(X^A;a^A) *_{a^A} \Box_{a^A}\mathcal{F}^{(s)}(X^A;a^A)\Big] \qquad (3.68)\\
S_0[h^{(s)}(x^\mu;a^\mu)] &= \int d^{d+1}x\sqrt{g}\Big[-\frac{1}{2}h^{(s)}(x;a^\mu) *_{a^\mu} \mathcal{F}^{(s)}(x;a^\mu) \\
&+ \frac{1}{8s(s-1)}\Box_{a^\mu}h^{(s)}(x;a^\mu) *_{a^\mu} \Box_{a^\mu}\mathcal{F}^{(s)}(x;a^\mu)\Big], \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

4 ԲՍ դաշտերի ածանցյալների փուլբեքը հարթ փարածությունից AdS_{d+1}

Այս բաժնում կքննարկենք խորանարդային փոխազդեցության համար ռադիալ պրոեկտումը ($Radial \quad pullback$) կովարիանտ «օֆֆ-շելլ» մեթոդով նկարագրված՝ [31],[32]: Այս արդյունքը համաձայնության մեջ է Մեցսաեվի արդյունքների հետ [18]: Ավելին, այս արդյունքն հաստատում է, որ ԲՍ դաշտերի բոլոր փոխազդեցություններն կամայական սպինների համար s_1, s_2, s_3՝ հարթ, dS և AdS փարածություններում միառժեք են մասնակի ածանցյալների և դաշտի վերանշանակման ճշտությամբ: [46] աշխատանքում ուսումնասիրվել է փոխազդեցության հիմնական անդամի կապը՝ $d+2$ և AdS_{d+1} փարածություններում արտահայտված AdS-ի կովարիանտ ածանցյալներով ու կորության ուղղումներով՝ անտեսելով բոլոր հետքերն և դիվերգենցիաներն: Այս աշխատանքում անում ենք մեկ քայլ առաջ՝ ամբողջությամբ լուծելով խնդիրը հարթ փարածության հիմնական անդամի համար ներառյալ հետքերն և մնացած անդամներն, որոնք առաջանում են փոխազդեցության հիմնական անդամից:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}_I^{main}(h^{(s_1)}(X,a^A),h^{(s_2)}(X,b^A),h^{(s_3)}(X,c^A)) = \\
&\sum_{Q_{ij}} C^{s_1,s_2,s_3}_{Q_{12},Q_{23},Q_{31}} \int d^{d+2}X *_{c^A}^{Q_{31}+n_3} K^{(s_1)}(Q_{31},n_3;c^A,a^A;X) \\
&*_{a^A}^{Q_{12}+n_1} K^{(s_2)}(Q_{12},n_1;a^A,b^A;X) *_{b^A}^{Q_{23}+n_2} K^{(s_3)}(Q_{23},n_2;b^A,c^A;X),
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

որտեղ

$$
K^{(s_1)}(Q_{12},n_1;a^A,b^A;X) = (a^A\partial_{b^A})^{Q_{12}}(a^B\partial_B)^{n_1}h^{(s_1)}(X;b^C). \tag{4.2}
$$

Այս տեսքի հիմնական առավելությունն այն է, որ խորանարդային փոխազդեցությունը ներկայացվում է, որպես վերը նշված բի-թենզորի խորանարդի ցիկլիկ ինդեքսների փաթույթով: Սկսած այստեղից բոլոր տեղերում կտեղադրենք AdS-ի շառավիղը՝ $L=1$ և կօգտագործենք հետևյալ $(\ldots,\ldots)$ փակագծերն AdS_{d+1} ինդեքսների գումարի համար: Այլ կերպ ասած՝

$$
(a,\partial_b) = a^\mu \partial_{b^\mu}, \tag{4.3}
$$

$$
(a,\nabla) = a^\mu \nabla_\mu, \tag{4.4}
$$

և

$$
(a,D) = a^\mu D_\mu. \tag{4.5}
$$

Քանի որ այստեղ մինիմալ օբյեկտը բի-թենզոր է (4.2), որը ունի սիմետրիկ ինդեքսների երկու հավաքածու, պետք է սահմանել կովարիանտ դիֆերենցման օպերատորներ ինդեքսների երկու հավաքածուների համար՝

$$D_\mu = \nabla_\mu - a^u\partial_{a^\mu} - a_\mu\partial_{a^u} - b^u\partial_{b^\mu} - b_\mu\partial_{b^u}. \tag{4.6}$$

Այժմ կարող ենք սկսել հետազոտել Լագրանժիանի (4.1) u կախվածությունը կորագիծ կորդինատներով (3.3): Ստացվում է՝

$$d + 2 + \sum_{i=1}^{3}(\Delta_{h^{(s_i)}} - n_i) = \sum_{i=1}^{3}(s_i) - \Delta + d - 4, \tag{4.7}$$

որտեղ Δ-ն փոխազդեցության մեջ ածանցյալների քանակն է: Ավելացնելով մինիմալ քանակի ածանցյալներ, տեսնում ենք որ փոխազդեցությունը մասշտաբը փոխում է ինչպես՝

$$\sum_{i=1}^{3} s_i - \Delta_{min} + d - 4 = d + 2s - 4 \tag{4.8}$$

Ոչ կոմուտատիվ հանրահաշիվը և a^u-ների կրճատումը

Այս ենթաբաժնի մեջ կդիտարկենք փոխազդեցության հիմնական անդամի (4.1) «ռադիալ փուլբեքը»:

$$K^{(s)}(Q, n; a^A, b^A; X) = (a^A\partial_{b^A})^Q(a^B\partial_B)^n h^{(s)}(X; b^C). \tag{4.9}$$

Այս բի-թենզորային անդամը կգեներացնի AdS-ում կորության բոլոր ուղղումներն որոնք որ կառաջանան հիմնական անդամից: Դիտարկենք օպերատորներն այն ներկայացմամբ, որոնք որ ազդում են պրոեկտված ԲՍ դաշտի վրա՝

$$h^{(s)}(X; b^A)|_{X=X(u,x)} = h^{(s)}(u, x^\mu; b^\mu) = e^{(s-2)u}h^{(s)}(x^\mu; b^\mu). \tag{4.10}$$

Որպեսզի ստանանք AdS-ում ուղղումներն բացենք բոլոր $d+2$ չափանի օբյեկտներն Փրենե բազիսով և կիրառենք անզացի կանոններն՝

$$(a^B\partial_B)^n|_{X=X(u,x)} = \left[e^{-u}(a^u\partial_u + a^\mu D_\mu)\right]^n \tag{4.11}$$

$$a^\mu D_\mu = (a, D) = (a, \nabla) - a^u(a, \partial_a) - b^u(a, \partial_b) - a^2\partial_{a^u} - (a, b)\partial_{b^u} \tag{4.12}$$

$$\text{ուերե} \qquad a^2 = (a, a) = a^\mu a^\nu g_{\mu\nu}(x)$$

այնուհետև փաթաթենք a^u, b^u, c^u:

Այսինքն գործ ենք ունենալու $d+2$ չափանի n-րդ կարգի ածանցյալի (4.11) $d+1$ չափանի վերլուծության հետ, որտեղ՝

$$\begin{aligned} a^u\partial_u + a^\mu D_\mu &= a^\mu \hat{\nabla}_\mu(g) - R, && (4.13)\\ \hat{\nabla}_\mu &= \nabla_\mu - b^u\partial_{b^\mu} - b_\mu\partial_{b^u}, && (4.14)\\ R &= a^u[(a\partial_a) - \partial_u] + a^2\partial_{a^u}, && (4.15)\end{aligned}$$

օպերատորներն ազդում են (4.10) զրոյական վիճակների վրա , որոնք որ անհիհիլացվում են հետևյալ օպերատորներով՝

$$| \, 0 >= e^{(s-2)u} h^{(s)}(x^\mu; b^\mu) \tag{4.16}$$

$$\partial_{a^\mu} \mid 0 >= \partial_{a^u} \mid 0 >= \partial_{b^u} \mid 0 >= 0, \tag{4.17}$$

$$R \mid 0 >= (2-s)a^u \mid 0 > . \tag{4.18}$$

Մեզ հետաքրքրող օպերատորն է՝

$$\left[e^{-u}(a, \hat{\nabla}) - e^{-u}R\right]^n, \tag{4.19}$$

որտեղ՝

$$R = a^u[(a\partial_a) + a^u\partial_{a^u} - \partial_u] + (a^2 - (a^u)^2)\partial_{a^u} \tag{4.20}$$

$$[(a\partial_a) + a^u\partial_{a^u}, R] = R, \tag{4.21}$$

$$[(a\partial_a) + a^u\partial_{a^u}, (a, \hat{\nabla})] = (a, \hat{\nabla}), \tag{4.22}$$

$$[R, e^{-u}(a, \hat{\nabla})] = 2e^{-u}a^u(a, \hat{\nabla}). \tag{4.23}$$

Մենք պետք է հաշվենք (4.19)-ը (4.16) զրոյական վիճակի վրա: Դրա համար վերլուծենք (4.19) օպերատորը ոչ կոմուտատիվ բինոմական շարքի՝

$$\begin{aligned} &[(a, e^{-u}\hat{\nabla}) - e^{-u}R]^n \mid 0 >= \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \\ &\sum_{n-p \geq i_p \geq i_{p-1} \geq i_{p-2} \dots \geq i_1 \geq 0} (a, e^{-u}\hat{\nabla})^{n-p-i_p} e^{-u} R (a, e^{-u}\hat{\nabla})^{i_p - i_{p-1}} \dots e^{-u} R (a, e^{-u}\hat{\nabla})^{i_1} \mid 0 > . \end{aligned} \tag{4.24}$$

Այնուհետև օգտագործելով

$$[R, (a, e^{-u}\hat{\nabla})^{i_k}] = 2i_k e^{-i_k u} a^u (a, \hat{\nabla})^{i_k}, \tag{4.25}$$

(4.24) -ը կարող ենք գրել հետևյալ տեսքով՝

$$[(a, e^{-u}\hat{\nabla}) - e^{-u}R]^n \mid 0 >= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p(a,\hat{\nabla})^{n-p}e^{(p-n)u}$$
$$\sum_{n-p\geq i_p\geq i_{p-1}\geq i_{p-2}...\geq i_1\geq 0} e^{-u}(2i_pa^u+R)e^{-u}(2i_{p-1}a^u+R)...e^{-u}(2i_1a^u+R)e^{(s-2)u}h^{(s)}(x^\mu;b^\mu). \tag{4.26}$$

Ներկայացնելով հետևյալ նոր օբյեկտներն՝

$$\phi_{i_k} = 2i_ka^u + R = a^u[2i_k + (a,\partial_a) + a^u\partial_{a^u} - \partial_u] + [a^2 - (a^u)^2]\partial_{a^u}. \tag{4.27}$$

և հաշվի առնելով

$$[(a,\partial_a) + a^u\partial_{a^u} - \partial_u]e^{-nu}f^{(m)}(a^\mu, a^u) = (m+n)e^{-nu}f^{(m)}(a^\mu, a^u), \tag{4.28}$$

կստանանք՝

$$[(a, e^{-u}\hat{\nabla}) - e^{-u}R]^n \mid 0 >= e^{(s-2-n)u}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p(a,\hat{\nabla})^{n-p}$$
$$\sum_{n-p\geq i_p\geq i_{p-1}\geq i_{p-2}...\geq i_1\geq 0} \phi_{i_p}\phi_{i_{p-1}}\dots\phi_{i_2}\phi_{i_1}h^{(s)}(x^\mu;b^\mu), \tag{4.29}$$

որտեղ ϕ_{i_k} և «ծնման» օպերատորներն են

$$\phi_{i_k} = a^u[2(i_k+k) - s] + [a^2 - (a^u)^2]\partial_{a^u}. \tag{4.30}$$

Այժմ ցույց տանք թե ինչպես կարելի է հաշվել (4.29) գումարը և ստանալ անհրաժեշտ վերլուծությունը a^u-ի աստիճաններով: Կատարենք նշանակում՝

$$V^{p+1}(i_{p+1})h^{(s)}(x^\mu;b^\mu) = \sum_{i_{p+1}\geq i_p\geq i_{p-1}\geq i_{p-2}...\geq i_1\geq 0}\phi_{i_p}\phi_{i_{p-1}}\dots\phi_{i_2}\phi_{i_1}h^{(s)}(x^\mu;b^\mu), \tag{4.31}$$

հաշվելով $\{i_k\}|_{k=1}^{p}$ ինդեքսներով գումարը կստանանք a^u և (a^2) փոփոխականներով բազմանդամ [2]

$$V^{p+1}(i_{p+1}) = \sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]}\xi_k^{p+1}(i_{p+1})(a^2)^k(a^u)^{p-2k}. \tag{4.32}$$

օգտագործելով ստացված արտահայտությունը որպես անզաց հետևյալ հավասարման համար՝

$$V^{p+1}(i_{p+1}) = \sum_{i_{p=0}}^{i_{p+1}}\phi_{i_p}V^p(i_p) \tag{4.33}$$

[2] $[p/2]$-ը $p/2$-ի ամբողջ մասն է և ամենավերջում պետք է տեղադրենք $i_{p+1} = n - p$

և օգտագործենք (4.30) մենք կստանանք հետևյալ ռեկուրենտ հավասարումը $2p-k$ կարգի բազմանդամների համար $\xi_k^{p+1}(i_{p+1}) \sim (i_{p+1})^{2p-k} + \dots$ գործակիցներով:

$$\xi_k^{p+1}(j) = \sum_{i=0}^{j}(2i+p+1+2k-s)\xi_k^p(i) + \sum_{i=0}^{j}(p+1-2k)\xi_{k-1}^p(i) \tag{4.34}$$

Հավասարումը ավելի հարմար է գրել «դիֆերենցյալ» տեսքով՝

$$\xi_k^{p+1}(i) - \xi_k^{p+1}(i-1) = (2i+p+1+2k-s)\xi_k^p(i) + (p+1-2k)\xi_{k-1}^p(i) \tag{4.35}$$

Հավելված 2-ում ներկայացված է, թե ինչպես ենք լուծել այս հավասարումը՝ օգտագործելով (4.31)-ը V^{p+1} անդամներն հաշվելու համար՝ $p=1,2,3,4,\dots$ դեպքերի համար: Ուսումնասիրելով ստացված անդամներն հանգում ենք $\xi_k^{p+1}(i)$-ի համար հետևյալ անզացին

$$\xi_k^{p+1}(i) = \frac{1}{(p-2k)!}(i+1)_p(2k+2+i-s)_{p-2k}P_k(i) \tag{4.36}$$

որտեղ $P_k(i) \sim i^k + \dots$-ն p- *ից անկախ* k-*րդ կարգի բազմանդամ է*: Այստեղ օգտագործեցինք Փոխհամերի սիմվոլներն ստացվածն ավելի կոմպակտ գրելու համար[3]

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+n-1) \tag{4.37}$$

Տեղադրելով (4.36)-ը (4.35) հավասարման մեջ ստանում ենք հավասարում $P_k(i)$-ի համար՝

$$(i+2k)P_k(i) - iP_k(i-1) = (i+2k-s)P_{k-1}(i) \tag{4.38}$$

կատարելով բազմանդամների հետևյալ նորմավորումն՝

$$\mathcal{P}_k(i) \equiv (i+1)_{2k}P_k(i) \tag{4.39}$$

ստանում ենք ավելի պարզ հավասարում և եզրային պայմաններ՝

$$\mathcal{P}_k(i) - \mathcal{P}_k(i-1) = (i+2k-1)(i+2k-s)\mathcal{P}_{k-1}(i) \tag{4.40}$$

$$\mathcal{P}_0(i) = P_0(i) = 1 \tag{4.41}$$

Վերջինս կարելի է լուծել երկու եղանակով: Առաջինը՝ ներկայացնելով ներդրված գումարների տեսքով՝

$$\mathcal{P}_k(i) = \sum_{i \geq i_k \geq i_{k-1} \geq i_{k-2} \dots \geq i_1 \geq 0} \prod_{n=1}^{k}(i_n+2n-1)(i_n+2n-s) \tag{4.42}$$

[3]նվազող փակտորյալի համար մենք օգտագործում ենք մեկ այլ նշանակում՝ $[s]_n = s(s-1)\dots(s-n+1)$

կամ լուծելով դիֆերենցյալ հավասարումը գեներացնող ֆունկցիայի համար՝

$$\mathcal{P}_k(y) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{P}_k(i) y^i \tag{4.43}$$

Որտեղ ֆորմալ ձևով մցրել ենք y փոփոխկանը $|y| < 1$ պայմանով, որպեսի սպացվի սահմանա-յին պայմանը՝

$$\mathcal{P}_0(y) = \sum_{i=0}^{\infty} y^i = \frac{1}{1-y} \tag{4.44}$$

Այս գեներացնող ֆունկցիայի համար (4.40)-ից կսպանանք `

$$(1-y)\mathcal{P}_k(y) = (y\frac{d}{dy} + 2k - 1)(y\frac{d}{dy} + 2k - s)\mathcal{P}_{k-1}(y) \tag{4.45}$$

Լուծելով վերջինս ռեկուրենտ ձևով և օգտագործելով (4.44) լուծումը կարող են գրել հետևյալ պեսքով՝

$$\mathcal{P}_k(y) = y^{-(2k+1)} \left[\frac{y^4}{1-y}\frac{d}{dy}y^s\frac{d}{dy}y^{-s}\right]^k \frac{y^2}{1-y} \tag{4.46}$$

ԵՎ վերջապես (4.36)-ը

$$\xi_k^{p+1}(i) = \frac{1}{(p-2k)!}(2k+i+1)_{p-2k}(2k+2+i-s)_{p-2k}\mathcal{P}_k(i) \tag{4.47}$$

Ոչ կոմուտատիվ հանրահաշիվը և b^u-ների կրճատումը

Որպեսզի դուրս բերենք b^u-ից կախումը և սպանանք վերջնական արտահայտությունը արտա-հայտված AdS_{d+1}-ի ∇ կովարիանտ ածանցյալներով պետք է հաշվենք մնացած անդամներն՝

$$\begin{aligned}(a, \hat{\nabla})^{n-p} &= [(a, \nabla) - b^u(a, \partial_b) - (a, b)\partial_{b^u}]^{n-p} \\ &= \sum_{\tilde{p}=0}^{n-p} (-1)^{\tilde{p}} \binom{n-p}{\tilde{p}} (a, \nabla)^{n-p-\tilde{p}} (L^+ + L^-)^{\tilde{p}},\end{aligned} \tag{4.48}$$

որտեղ L^+, L^- գեներացնում են Լիի հանրահաշիվ՝

$$L^+ = b^u(a, \partial_b), \quad L^- = (a, b)\partial_{b^u}, \tag{4.49}$$

$$[L^+, L^-] = H = a^2 b^u \partial_{b^u} - (a, b)(a, \partial_b), \tag{4.50}$$

$$[H, L^\pm] = \pm 2a^2 L^\pm. \tag{4.51}$$

Այս Լիի հանրահաշվի ներկայացումներն սպացվում են $(s+1)$ չափանի «նուլ վեկտորների» վեկտորական տարածությունից $\{\Phi_n(a; b)\}|_{n=0}^s$

$$\Phi_n(a; b) = h^{(s)}_{\mu_1,\mu_2,\ldots\mu_s} a^{\mu_1} a^{\mu_2} \ldots a^{\mu_n} b^{\mu_{n+1}} b^{\mu_{n+2}} \ldots b^{\mu_s}, \qquad L^- \Phi_n(a; b) = 0, \tag{4.52}$$

(4.49)-(4.51)-ից հետևում է, որ սկսած $\Phi_0(a;b)$ ցանկացած $\Phi_n(a;b)$ կարելի է ստանալ ազդելով H օպերատորով:

$$H\Phi_0(a;b) = -s(a,b)\Phi_1(a,b), \tag{4.53}$$

$$H^2\Phi_0(a;b) = [s]_2(a,b)^2\Phi_2(a;b) + sa^2(a,b)\Phi_1(a;b), \tag{4.54}$$

$$H^3\Phi_0(a;b) = -\{[s]_3(a,b)^3\Phi_3(a;b) + 3[s]_2a^2(a,b)^2\Phi_2(a;b) + s(a^2)^2(a,b)\Phi_1(a;b)\}. \tag{4.55}$$

Օգտագործելով հետևյալ անզացը՝

$$H^n\Phi_0(a;b) = (-1)^n\sum_{r=1}^{n} A_r^{(n)}[s]_r(a^2)^{n-r}(a,b)^r\Phi_r(a;b), \tag{4.56}$$

ստանում ենք ռեկուրենտ հավասարումը՝

$$A_{r-1}^{(n)} + rA_r^{(n)} = A_r^{(n+1)}, \tag{4.57}$$

$$A_r^{(n)} = 0 \quad \text{երբ} \quad r > n. \tag{4.58}$$

Որպես եզրային պայմաններ վերցված են՝ $A_{-1}^{(n)} = 0$, $A_0^{(0)} = 1$ Բազմապատկենք x^r-ով և մտցնենք՝

$$P_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r^{(n)}x^r \tag{4.59}$$

կստանանք ավելի պարզ ռեկուրենտ հավասարում՝

$$x\frac{d}{dx}\left(e^xP_n(x)\right) = e^xP_{n+1}(x)\,. \tag{4.60}$$

որը որ հեշտությամբ կլուծվի քանի որ $P_0(x) = 1$: n անգամ իտերացիա անելով կստանանք՝

$$e^xP_n(x) = \left(x\frac{d}{dx}\right)^n e^x\,, \tag{4.61}$$

կամ

$$P_n(x) = e^{-x}\left(x\frac{d}{dx}\right)^n e^x\,. \tag{4.62}$$

$P_n(x)$-ը n-րդ կարգի բազմանդամ է, որը նշանակում է որ $A_r^{(n)} = 0$ երբ $r > n$:

Գեներացնող ֆունկցիան ստանալու համար մցնենք՝

$$Q(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,\frac{t^n}{n!} \tag{4.63}$$

$$Q(x,t) = e^{-x}e^{tx\frac{d}{dx}}e^x = e^{x(e^t-1)} \tag{4.64}$$

$\{\Phi_n(a;b)\}_{n=0}^{s}$ վեկտորների բազիսը օգտագործելով Լիի հանրահաշիվը կկառուցվի հետևյալ կերպ՝

$$(L^+ + L^-)^{\tilde{p}}\Phi_0(b) = \sum_{\tilde{k}=0}^{\tilde{p}} \sum_{\tilde{p}-\tilde{k}\geq i_{\tilde{k}}\geq i_{\tilde{k}-1}\geq i_{\tilde{k}-2}...\geq i_1\geq 1}$$

$$(L^+)^{\tilde{p}-\tilde{k}-i_{\tilde{k}}} L^-(L^+)^{i_{\tilde{k}}-i_{\tilde{k}-1}} L^-(L^+)^{i_{\tilde{k}-1}-i_{\tilde{k}-2}} L^- ...(L^+)^{i_2-i_1} L^-(L^+)^{i_1}\Phi_0(b). \tag{4.65}$$

Առաջանում են միայն L^--ով և L^+-ի աստիճաններով կոմուտատորներ:

$$[L^-,(L^+)^i] = -\sum_{j=0}^{i-1}(L^+)^{i-j-1}H(L^+)^j =$$

$$-\sum_{j=0}^{i-1}(L^+)^{i-1}(H+2ja^2) = -(L^+)^{i-1}(iH+[i]_2\, a^2). \tag{4.66}$$

Ամբողջ «նոլ վեկտորների» $\{\Phi_n(a;b)\}$ բազիսը կառուցվում է $\Phi_0(b)$-ի վրա ազդելով H օպերատորով

$$\psi_i = iH + [i]_2\, a^2, \tag{4.67}$$

արդյունքում

$$\sum_{\tilde{k}=1}^{[\frac{\tilde{p}}{2}]}(-1)^{\tilde{k}}(L^+)^{\tilde{p}-2\tilde{k}}W^{\tilde{k}}(a^2,H)\Phi_0(b) = \sum_{\tilde{k}=1}^{[\frac{\tilde{p}}{2}]}(b^u)^{\tilde{p}-2\tilde{k}}(-1)^{\tilde{k}}(a,\partial_b)^{\tilde{p}-2\tilde{k}}W^{\tilde{k}}(a^2,H)\Phi_0(b) \tag{4.68}$$

որտեղ

$$W^{\tilde{k}}(a^2,H,i_{\tilde{k}+1})\Phi_0(b) = \sum_{i_{\tilde{k}+1}\geq i_{\tilde{k}}\geq i_{\tilde{k}-1}\geq i_{\tilde{k}-2}...\geq i_2\geq i_1\geq 1} \psi_{i_{\tilde{k}}-\tilde{k}+1}\psi_{i_{\tilde{k}-1}-\tilde{k}+2}\psi_{i_{\tilde{k}-2}-\tilde{k}+3}...\psi_{i_2-1}\psi_{i_1}\Phi_0(b). \tag{4.69}$$

Այս գումարը $\tilde{k}$-րդ կարգի բազմանդամ է H-ից և a^2-ից:

$$W^{\tilde{k}}(a^2,H,i_{\tilde{k}+1}) = \sum_{m=0}^{\tilde{k}} \eta_{\tilde{k}}^m(i_{\tilde{k}+1})(a^2)^m H^{\tilde{k}-m} \tag{4.70}$$

Ինչպես և (4.32)-ում անյպես էլ այստեղ օգտագործելով այս անզացը հետևյալ ռեկուրենտ հավասարման համար

$$W^{\tilde{k}+1}(a^2,H,i_{\tilde{k}+2}) = \sum_{i_{\tilde{k}+1}=1}^{i_{\tilde{k}+2}} \psi_{i_{\tilde{k}+1}-\tilde{k}}W^{\tilde{k}}(a^2,H,i_{\tilde{k}+1}) \tag{4.71}$$

$$\eta_{\tilde{k}+1}^m(j) = \sum_{i=1}^{j}\left[(i-\tilde{k})\eta_{\tilde{k}}^m(i) + (i-\tilde{k})(i-\tilde{k}-1)\eta_{\tilde{k}}^{m-1}(i)\right] \tag{4.72}$$

կամ առանց գումարների՝

$$\eta^m_{\tilde{k}+1}(i) - \eta^m_{\tilde{k}+1}(i-1) = (i-\tilde{k})\eta^m_{\tilde{k}}(i) + (i-\tilde{k})(i-\tilde{k}-1)\eta^{m-1}_{\tilde{k}}(i) \tag{4.73}$$

Ուսումնասիրելով բազմանդամների գործակիցներն, տեսնում ենք որ հնարավոր է անել $i^{2\tilde{k}}$ անդամների ֆակտորիզացում հետևյալ կերպ՝

$$\eta^m_{\tilde{k}}(i) = \frac{2^{m-\tilde{k}}3^{-m}}{(\tilde{k}-m)!m!}(i-\tilde{k}+1)_{2\tilde{k}}P_m(i,\tilde{k}), \quad P_0(i,\tilde{k}) = 1 \tag{4.74}$$

որտեղ $P_m(i,\tilde{k}) \sim (i-\frac{\tilde{k}}{2})^m + \ldots$ բազմանդամներն m-րդ կարգի են i-ով և $\tilde{k}$-ով: Վերջիններս բավարարում են՝

$$(i+\tilde{k}+1)P_m(i,\tilde{k}+1)-(i-\tilde{k}-1)P_m(i-1,\tilde{k}+1) = 2(\tilde{k}-m+1)P_m(i,\tilde{k})+3m(i-\tilde{k}-1)P_{m-1}(i,\tilde{k}) \tag{4.75}$$

որը որ, բարդությամբ նույն կարգի է ինչ որ (4.73): Մյուս կողմից կարելի է հաշվել $\eta^m_{\tilde{k}}(i_{\tilde{k}+1})$ անմիջապես հաշվի առնելով (4.69): Համեմատելով (4.70)-ը (4.69)-ի հետ և նկատի ունենալով (4.67)-ը տեսնում ենք, որ այն հնարավոր է

$$\eta^m_{\tilde{k}}(\tilde{p}-\tilde{k}) = \eta^m_{\tilde{k}}(i_{\tilde{k}+1})|_{i_{\tilde{k}+1}=\tilde{p}-\tilde{k}} \tag{4.76}$$

գրել հետևյալ կերպ

$$\begin{aligned}\eta^m_{\tilde{k}}(\tilde{p}-\tilde{k}) = & \sum_{\tilde{p}-\tilde{k}\ge i_{\tilde{k}}\ge i_{\tilde{k}-1}\ge i_{\tilde{k}-2}\ldots\ge i_2\ge i_1\ge 1} \quad \sum_{\tilde{k}\ge n_m\ge n_{m-1}\ge n_{m-2}\ldots\ge n_2\ge n_1\ge 1} \\ & \prod_{l_m=n_m+1}^{\tilde{k}}(i_{l_m}-l_k+1)[i_{n_m}-n_m+1]_2 \prod_{l_{m-1}=n_{m-1}+1}^{n_m-1}(i_{l_{m-1}}-l_{m-1}+1)[i_{n_{m-1}}-n_{m-1}+1]_2\ldots \\ & \ldots\prod_{l_2=n_2+1}^{n_3-1}(i_{l_2}-l_2+1)[i_{n_2}-n_2+1]_2\prod_{l_1=n_1+1}^{n_2-1}(i_{l_1}-l_1+1)[i_{n_1}-n_1+1]_2\prod_{l=1}^{n_1-1}(i_l-l+1)\end{aligned} \tag{4.77}$$

Այս բանաձևը նշանակում է, որ $\eta^0_{\tilde{k}}(\tilde{p}-\tilde{k})$-ի արտահայտության մեջ

$$\eta^0_{\tilde{k}}(\tilde{p}-\tilde{k}) = \sum_{\tilde{p}-\tilde{k}\ge i_{\tilde{k}}\ge i_{\tilde{k}-1}\ge i_{\tilde{k}-2}\ldots\ge i_2\ge i_1\ge 1}\prod_{l=1}^{\tilde{k}}(i_l-l+1) \tag{4.78}$$

պետք է փոխարինենք m հատ փակագծերով $(i_{n_r}-n_r+1)|^m_{r=1}$, որոնք ունեն m Փոխհամերներ $\{[i_{n_r}-n_r+1]_2\}|^m_{r=1}$ բոլոր հնարավոր ձևերով, իսկ վերջում վերցնել գումար բոլորից:

5 Խորանարդային փոխազդեցության հիմնական անդամի պրոեկտումը $(pullback)$

Դիտարկենք խորանարդային ինքնափոխազդեցության հիմնական անդամը, որը որ ստացվում է (Ա.4)-(Ա.6)-ից դնելով՝

$$
\begin{aligned}
s_1 &= s_2 = s_3 = s, && (5.1)\\
\nu_1 &= \nu_2 = \nu_3 = 0, && (5.2)\\
Q_{23} &= n_1 = \alpha, && (5.3)\\
Q_{31} &= n_2 = \beta, && (5.4)\\
Q_{12} &= n_3 = \gamma. && (5.5)
\end{aligned}
$$

(4.1), (4.2)-ը ձևափոխվում են հատկյալ փրինոմիալ գործակիցներով, $(a)\alpha, (b)\beta, (c)\gamma$-ով ցիկլիկ արտահայտությանը՝

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_I^{main} = & \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=s}} \binom{s}{\alpha,\beta,\gamma} \int d^{d+2}X \\
& *_a^{\gamma+\alpha} (a^A \partial_{b^A})^\gamma (a^B \partial_B)^\alpha h^{(s)}(X; b^C) \\
& *_b^{\alpha+\beta} (b^D \partial_{c^D})^\alpha (b^E \partial_E)^\beta h^{(s)}(X; c^F) \\
& *_c^{\beta+\gamma} (c^G \partial_{a^G})^\beta (c^H \partial_H)^\gamma h^{(s)}(X; a^K), \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

Նախորդ բաժնի հիմնական արդյունքն այն է, որ մենք այժմ կարող ենք բացել (5.6) -ի ամեն մի փողը և հանել մեջից a^u, b^u, c^u կախվածությունը, որը հնարավորություն կտա կատարելու ճիշտ փաթույթ AdS_{d+1}-ի կովարիանտ ածանցյալների և կորության ուղղումների լեզվով: Միավորելով (4.29)-(4.32) և (4.48)-(4.70) կստանանք՝

$$
\begin{aligned}
(a^B \partial_B)^\alpha h^{(s)}(X; b^C) = & e^{(s-2-\alpha)u} \sum_{p_1=0}^{\alpha} \sum_{k_1=0}^{[\frac{p_1}{2}]} \sum_{\tilde{p_1}=0}^{\alpha-p_1} \sum_{\tilde{k_1}=1}^{[\frac{\tilde{p}_1}{2}]} (-1)^{p_1+\tilde{p_1}+\tilde{k_1}} (a^u)^{p_1-2k_1} (b^u)^{\tilde{p_1}-2\tilde{k_1}} (a,\nabla)^{\alpha-p_1-\tilde{p_1}} \\
& \xi_{k_1}^{p_1+1}(\alpha-p_1) \binom{\alpha-p_1}{\tilde{p_1}} (a^2)^{k_1} (a,\partial_b)^{\tilde{p_1}-2\tilde{k_1}} W^{\tilde{k_1}}(a^2, H_1) h^{(s)}(x^\mu; b^\mu) \qquad (5.7)
\end{aligned}
$$

Այնուհետև վերլուծենք՝

$$
(a^A \partial_{b^A})^\gamma = \sum_{m=0}^{\gamma} \binom{\gamma}{m_1} (a^u \partial_{b^u})^{m_1} (a, \partial_b)^{\gamma-m_1} \qquad (5.8)
$$

կստանանք՝

$$
\begin{aligned}
(a^A \partial_{b^A})^\gamma (a^B \partial_B)^\alpha h^{(s)}(X; b^C) = & e^{(s-2-\alpha)u} \sum_{m_1=0}^{\gamma} \sum_{m_1,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1}}^{\gamma,\alpha,[\frac{p_1}{2}],\alpha-p_1,[\frac{\tilde{p}_1}{2}]} \\
& (a^u)^{p_1-2k_1+m_1} (b^u)^{\tilde{p_1}-2\tilde{k_1}-m_1} (a,\partial_b)^{\gamma+\tilde{p_1}-2\tilde{k_1}-m_1} (a,\nabla)^{\alpha-p_1-\tilde{p_1}} \Theta[\gamma,\alpha,m_1,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1},a^2,H_1] h^{(s)}(b^\mu).
\end{aligned}
$$

, որտեղ

$$\sum_{m_1,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1}}^{\gamma,\alpha,[\frac{p_1}{2}],\alpha-p_1,[\frac{\tilde{p}_1}{2}]} = \sum_{m_1=0}^{\gamma}\sum_{p_1=0}^{\alpha}\sum_{k_1=0}^{[\frac{p_1}{2}]}\sum_{\tilde{p_1}=0}^{\alpha-p_1}\sum_{\tilde{k_1}=1}^{[\frac{\tilde{p}_1}{2}]} \tag{5.10}$$

և

$$\begin{aligned}&\Theta[\gamma,\alpha,m_1,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1},a^2,H_1]\\ &=(-1)^{p_1+\tilde{p_1}+\tilde{k_1}}[\tilde{p_1}-2\tilde{k_1}]_{m_1}\binom{\gamma}{m_1}\xi_{k_1}^{p_1+1}(\alpha-p_1)\binom{\alpha-p_1}{\tilde{p_1}}(a^2)^{k_1}W^{\tilde{k_1}}(a^2,H_1)\end{aligned} \tag{5.11}$$

Վերջապես գրենք փոխազդեցության գլխավոր անդամի արտահայտությունը՝

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_I^{main} &= \int due^{(d+2s-4)u}d^{d+1}x\sqrt{g}\sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma\\ \alpha+\beta+\gamma=s}}\binom{s}{\alpha,\beta,\gamma}\sum_{m_1,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1}}^{\gamma,\alpha,[\frac{p_1}{2}],\alpha-p_1,[\frac{\tilde{p_1}}{2}]}\sum_{m_2,p_2,k_2,\tilde{p_2},\tilde{k_2}}^{\alpha,\beta,[\frac{p_2}{2}],\beta-p_2,[\frac{\tilde{p_2}}{2}]}\sum_{m_3,p_3,k_3,\tilde{p_3},\tilde{k_3}}^{\beta,\gamma,[\frac{p_3}{2}],\gamma-p_3,[\frac{\tilde{p_3}}{2}]}\\
&\sum_{n_1,n_2,n_3=0}^{\gamma+\alpha,\alpha+\beta,\beta+\gamma}\frac{(-1)^{n_1+n_2+n_3}}{\binom{\gamma+\alpha}{n_1}\binom{\alpha+\beta}{n_2}\binom{\beta+\gamma}{n_3}}*_{a^u}^{n_1}*_{b^u}^{n_2}*_{c^u}^{n_3}*_{a^\mu}^{\gamma+\alpha-n_1}*_{b^\mu}^{\alpha+\beta-n_2}*_{c^\mu}^{\beta+\gamma-n_3}\\
&(a^u)^{p_1-2k_1+m_1}(b^u)^{\tilde{p_1}-2\tilde{k_1}-m_1}(a,\partial_b)^{\gamma+\tilde{p_1}-2\tilde{k_1}-m_1}(a,\nabla)^{\alpha-p_1-\tilde{p_1}}\Theta[\gamma,\alpha,m_1,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1},a^2,H_1]h^{(s)}(b^\mu)\\
&(b^u)^{p_2-2k_2+m_2}(c^u)^{\tilde{p_2}-2\tilde{k_2}-m_2}(b,\partial_c)^{\alpha+\tilde{p_2}-2\tilde{k_2}-m_2}(b,\nabla)^{\beta-p_2-\tilde{p_2}}\Theta[\alpha,\beta,m_2,p_2,k_2,\tilde{p_2},\tilde{k_2},b^2,H_2]h^{(s)}(c^\mu)\\
&(c^u)^{p_3-2k_3+m_3}(a^u)^{\tilde{p_3}-2\tilde{k_3}-m_3}(c,\partial_a)^{\beta+\tilde{p_3}-2\tilde{k_3}-m_3}(c,\nabla)^{\gamma-p_3-\tilde{p_3}}\Theta[\beta,\gamma,m_3,p_3,k_3,\tilde{p_3},\tilde{k_3},c^2,H_3]h^{(s)}(a^\mu)\end{aligned} \tag{5.12}$$

Այժմ փաթաթենք բոլոր ոչ AdS_{d+1} կոմպոնենտները՝ a^u, b^u, c^u օգտագործելով (5.12)-ի երկրորդ տողի $*$ օպերատորները: Կստանանք հետևյալ պայմանները՝

$$p_1-2k_1+m_1=\tilde{p_3}-2\tilde{k_3}-m_3=n_1 \tag{5.13}$$

$$p_2-2k_2+m_2=\tilde{p_1}-2\tilde{k_1}-m_1=n_2 \tag{5.14}$$

$$p_3-2k_3+m_3=\tilde{p_2}-2\tilde{k_2}-m_2=n_3 \tag{5.15}$$

Վերցնելով $m_i, i=1,2,3$-ով գումարը կստանանք՝

$$p_1+\tilde{p_1}=n_1+n_2+2(k_1+\tilde{k_1}) \tag{5.16}$$

$$p_2+\tilde{p_2}=n_2+n_3+2(k_2+\tilde{k_2}) \tag{5.17}$$

$$p_3+\tilde{p_3}=n_3+n_1+2(k_3+\tilde{k_3}) \tag{5.18}$$

(5.13)-(5.15) -ը սահմանափակում են դնում նաև n_1, n_2, n_3-ի գումարման փիրույթի վրա զրոյից մինչև α, β, γ: Վերջում սպանում ենք

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_I^{main} = \int due^{(d+2s-4)u} d^{d+1}x\sqrt{g} \sum_{\substack{\alpha,\beta,\gamma \\ \alpha+\beta+\gamma=s}} \binom{s}{\alpha,\beta,\gamma} \sum_{p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1}}^{\alpha,[\frac{p_1}{2}],\alpha-p_1,[\frac{\tilde{p_1}}{2}]} \sum_{p_2,k_2,\tilde{p_2},\tilde{k_2}}^{\beta,[\frac{p_2}{2}],\beta-p_2,[\frac{\tilde{p_2}}{2}]} \sum_{p_3,k_3,\tilde{p_3},\tilde{k_3}}^{\gamma,[\frac{p_3}{2}],\gamma-p_3,[\frac{\tilde{p_3}}{2}]} \\
\sum_{n_1,n_2,n_3=0}^{\alpha,\beta,\gamma} \frac{(-1)^{n_1+n_2+n_3}}{\binom{\gamma+\alpha}{n_1}\binom{\alpha+\beta}{n_2}\binom{\beta+\gamma}{n_3}} *_{a^\mu}^{\gamma+\alpha-n_1} *_{b^\mu}^{\alpha+\beta-n_2} *_{c^\mu}^{\beta+\gamma-n_3} \\
(a,\partial_b)^{\gamma+n_2}(a,\nabla)^{\alpha-n_1-n_2-2(k_1+\tilde{k_1})}\tilde{\Theta}[\gamma,\alpha,n_2,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1},a^2,H_1]h^{(s)}(b^\mu) \\
(b,\partial_c)^{\alpha+n_3}(b,\nabla)^{\beta-n_2-n_3-2(k_2+\tilde{k_2})}\tilde{\Theta}[\alpha,\beta,n_3,p_2,k_2,\tilde{p_2},\tilde{k_2},b^2,H_2]h^{(s)}(c^\mu) \\
(c,\partial_a)^{\beta+n_1}(c,\nabla)^{\gamma-n_3-n_1-2(k_3+\tilde{k_3})}\tilde{\Theta}[\beta,\gamma,n_1,p_3,k_3,\tilde{p_3},\tilde{k_3},c^2,H_3]h^{(s)}(a^\mu)
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

որտեղ

$$\tilde{\Theta}[\gamma,\alpha,n_2,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1},a^2,H_1] = \Theta[\gamma,\alpha,m_1=\tilde{p_1}-2\tilde{k_1}-n_2,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1},a^2,H_1] \tag{5.20}$$

$$\tilde{\Theta}[\alpha,\beta,n_3,p_2,k_2,\tilde{p_2},\tilde{k_2},b^2,H_2] = \Theta[\alpha,\beta,m_2=\tilde{p_2}-2\tilde{k_2}-n_3,p_2,k_2,\tilde{p_2},\tilde{k_2},b^2,H_2] \tag{5.21}$$

$$\tilde{\Theta}[\beta,\gamma,n_1,p_3,k_3,\tilde{p_3},\tilde{k_3},c^2,H_3] = \Theta[\beta,\gamma,m_3=\tilde{p_3}-2\tilde{k_3}-n_1,\tilde{p_3},p_3,k_3,\tilde{k_3},c^2,H_3] \tag{5.22}$$

Որպեսզի ավելի լավ հասկանանք փոխազդեցության ածանցյալների կառուցվածքը՝ հաշվի առնենք (5.16)-(5.18) և վերադասավորենք (5.19) -ից եկող գումարներն հետևյալ կերպ՝

$$\sum_{n_3\geq 0}\sum_{n_2\geq 0}\sum_{n_1\geq 0}(-1)^{n_1+n_2+n_3} = \sum_{N\geq 0}(-1)^N \sum_{\substack{n_1,n_2,n_3 \\ \sum n_i=N}}, \tag{5.23}$$

$$\sum_{\substack{\{p_i,k_i,\tilde{p_i},\tilde{k_i}\}_{i=1,2,3} \\ p_i+\tilde{p_i}=n_i+n_{i+1}+2(k_i+\tilde{k_i})}} = \sum_{K\geq 0} \sum_{\substack{\{P_i,K_i\}_{i=1,2,3} \\ P_i=n_i+n_{i+1}+2K_i \\ \sum K_i=K}} \sum_{\substack{\{p_i,k_i,\tilde{p_i},\tilde{k_i}\}_{i=1,2,3} \\ p_i+\tilde{p_i}=P_i;k_i+\tilde{k_i}=K_i}} \tag{5.24}$$

որտեղ $\{n_i\} = n_1, n_2, n_3$ -ն ցիկլիկ է՝ $n_4 = n_1$: Դրանից հետո մցնենք նոր գումաման փոփոխականներ՝ α, β, γ -ի փոխարեն

$$\tilde{\alpha} = \alpha - n_1 - n_2 - 2K_1 = \alpha - P_1, \tag{5.25}$$

$$\tilde{\beta} = \beta - n_2 - n_3 - 2K_2 = \beta - P_2, \tag{5.26}$$

$$\tilde{\gamma} = \gamma - n_3 - n_1 - 2K_3 = \gamma - P_3. \tag{5.27}$$

իրենց համապատասխան գումարման սահմաններով ու պայմաններով՝

$$0 \leq \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma} \leq s - 2(N+K), \tag{5.28}$$

$$\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + \tilde{\gamma} = s - 2(N+K), \tag{5.29}$$

$$N = \sum_i n_i; \quad K = \sum_i K_i = \sum_i (k_i + \tilde{k_i}). \tag{5.30}$$

Այս ձևափոխությունններն հանգեցնում են հետևյալ արտահայտությանը՝

$$\mathcal{L}_I^{main} = \int due^{(d+2s-4)u} d^{d+1}x\sqrt{g} \sum_{N\geq 0}\sum_{K\geq 0} \frac{(-1)^N s!}{(s-2(N+K))!} \sum_{\substack{\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma} \\ \tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}=s-2(N+K)}} \binom{s-2(N+K)}{\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}}$$

$$\sum_{\substack{\{n_i\}_{i=1,2,3} \\ \sum n_i = N}} \sum_{\substack{\{P_i,K_i\}_{i=1,2,3} \\ P_i=n_i+n_{i+1}+2K_i \\ \sum K_i = K}} \sum_{\substack{\{p_i,k_i,\tilde{p_i},\tilde{k_i}\}_{i=1,2,3} \\ p_i+\tilde{p_i}=P_i; k_i+\tilde{k_i}=K_i}} \tag{5.31}$$

$$\frac{*_{a^\mu}^{\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha}+N+2(K_3+K_1)} *_{b^\mu}^{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+N+2(K_1+K_2)} *_{c^\mu}^{\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}+N+2(K_2+K_3)}}{\binom{\tilde{\gamma}+\tilde{\alpha}+N+2(K_3+K_1)+n_1}{n_1}\binom{\tilde{\alpha}+\tilde{\beta}+N+2(K_1+K_2)+n_2}{n_2}\binom{\tilde{\beta}+\tilde{\gamma}+N+2(K_2+K_3)+n_3}{n_3}}$$
$$(a,\partial_b)^{\tilde{\gamma}+N+2K_3}(a,\nabla)^{\tilde{\alpha}}\,\Xi^{2K_1}[\tilde{\gamma},\tilde{\alpha},n_2,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1},a^2,H_1]h^{(s)}(b^\mu)$$
$$(b,\partial_c)^{\tilde{\alpha}+N+2K_1}(b,\nabla)^{\tilde{\beta}}\,\Xi^{2K_2}[\tilde{\alpha},\tilde{\beta},n_3,p_2,k_2,\tilde{p_2},\tilde{k_2},b^2,H_2]h^{(s)}(c^\mu)$$
$$(c,\partial_a)^{\tilde{\beta}+N+2K_2}(c,\nabla)^{\tilde{\gamma}}\,\Xi^{2K_3}[\tilde{\beta},\tilde{\gamma},n_1,p_3,k_3,\tilde{p_3},\tilde{k_3},c^2,H_3]h^{(s)}(a^\mu) \tag{5.32}$$

որտեղ

$$\tilde{\Theta}[\gamma,\alpha,n_2,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1},a^2,H_1] = \frac{\gamma!}{\tilde{\alpha}!}\Xi^{2K_1}[\tilde{\gamma},\tilde{\alpha},n_2,P_3,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1},a^2,H_1] \tag{5.33}$$
$$\tilde{\Theta}[\alpha,\beta,n_3,p_2,k_2,\tilde{p_2},\tilde{k_2},b^2,H_2] = \frac{\alpha!}{\tilde{\beta}!}\Xi^{2K_2}[\tilde{\alpha},\tilde{\beta},n_3,P_1,p_2,k_2,\tilde{p_2},\tilde{k_2},b^2,H_2] \tag{5.34}$$
$$\tilde{\Theta}[\beta,\gamma,n_1,p_3,k_3,\tilde{p_3},\tilde{k_3},c^2,H_3] = \frac{\beta!}{\tilde{\gamma}!}\Xi^{2K_3}[\tilde{\beta},\tilde{\gamma},n_1,P_2,p_3,k_3,\tilde{p_3},\tilde{k_3},c^2,H_3] \tag{5.35}$$

և

$$\Xi^{2K_1}[\tilde{\gamma},\tilde{\alpha},n_2,P_3,p_1,k_1,\tilde{p_1},\tilde{k_1},a^2,H_1] = \frac{(\tilde{\alpha}+\tilde{p_1})!(a^2)^{k_1}}{(\tilde{\gamma}+P_3-\tilde{p_1}+2\tilde{k_1}+n_2)!}\binom{\tilde{p_1}-2\tilde{k_1}}{n_2}\xi_{k_1}^{p_1+1}(\tilde{\alpha}+\tilde{p_1})W^{\tilde{k_1}}(a^2,H_1)\,, \tag{5.36}$$
$$\Xi^{2K_2}[\tilde{\alpha},\tilde{\beta},n_3,P_1,p_2,k_2,\tilde{p_2},\tilde{k_2},b^2,H_2] = \frac{(\tilde{\beta}+\tilde{p_2})!(a^2)^{k_2}}{(\tilde{\alpha}+P_1-\tilde{p_2}+2\tilde{k_2}+n_3)!}\binom{\tilde{p_2}-2\tilde{k_2}}{n_3}\xi_{k_2}^{p_2+1}(\tilde{\beta}+\tilde{p_2})W^{\tilde{k_2}}(b^2,H_2)\,, \tag{5.37}$$
$$\Xi^{2K_3}[\tilde{\beta},\tilde{\gamma},n_1,P_2,p_3,k_3,\tilde{p_3},\tilde{k_3},c^2,H_3] = \frac{(\tilde{\gamma}+\tilde{p_3})!(a^2)^{k_3}}{(\tilde{\beta}+P_2-\tilde{p_3}+2\tilde{k_3}+n_1)!}\binom{\tilde{p_3}-2\tilde{k_3}}{n_1}\xi_{k_3}^{p_3+1}(\tilde{\gamma}+\tilde{p_3})W^{\tilde{k_3}}(c^2,H_3)\,. \tag{5.38}$$

Ավարտին հասցնելով մեր դիտարկումը կարող ենք $(a^2), (b)^2, (c)^2$-ով վերլուծությունը արտահայտել համապատասխան Ξ^{2K_i} անդամներով օգտագործելով (4.56) և (4.70)

$$(a^2)^{k_1} W^{\tilde{k_1}}(a^2, H_1) h^{(s)}(b^\mu) = \tag{5.39}$$

$$\sum_{t_1=0}^{\tilde{k_1}} (-1)^{t_1} \sum_{r_1=1}^{\tilde{k_1}-t_1} \eta^{t_1}_{\tilde{k_1}} (\tilde{p_1} - \tilde{k_1}) A^{\tilde{k_1}-t_1}_{r_1} [s]_{r_1} (a^2)^{K_1 - r_1} (a, b)^{r_1} \Phi_{r_1}(a, b) \tag{5.40}$$

$$(b^2)^{k_2} W^{\tilde{k_2}}(b^2, H_2) h^{(s)}(c^\mu) = \tag{5.41}$$

$$\sum_{t_2=0}^{\tilde{k_2}} (-1)^{t_2} \sum_{r_2=1}^{\tilde{k_2}-t_2} \eta^{t_2}_{\tilde{k_2}} (\tilde{p_2} - \tilde{k_2}) A^{\tilde{k_2}-t_2}_{r_2} [s]_{r_2} (b^2)^{K_2 - r_2} (b, c)^{r_2} \Phi_{r_2}(b, c) \tag{5.42}$$

$$(c^2)^{k_3} W^{\tilde{k_3}}(a^3, H_3) h^{(s)}(c^\mu) = \tag{5.43}$$

$$\sum_{t_3=0}^{\tilde{k_3}} (-1)^{t_3} \sum_{r_3=1}^{\tilde{k_3}-t_3} \eta^{t_3}_{\tilde{k_3}} (\tilde{p_3} - \tilde{k_3}) A^{\tilde{k_3}-t_3}_{r_3} [s]_{r_3} (c^2)^{K_3 - r_3} (c, a)^{r_3} \Phi_{r_3}(c, a) \tag{5.44}$$

6 Եզրակացություն

Մենք հաջողությամբ կառուցեցինք խորանարդային ինքնափոխազդեցության հիմնական անդամի բոլոր AdS ուղղումներն՝ ներառյալ հետքերն ու դիվերգենցիաներն օգտագործելով [46]-ում նկարագրված ռադիալ պրոեկցման ($Radial \quad pullback$) մեթոդի մի փոքր ձևափոխված տարբերակն: Տրված s սպինի համար $\Delta_{min} = s$ սպացանք բոլոր (5.32) կորության ուղղումներն $s-2(N+K)$ ածանցյալներով անդամների շարքի տեսքով, որտեղ $0 \leq N+K \leq \frac{s}{2}$: Որտեղ K-ն a^2, b^2, c^2-ի աստիճանների գումարն է, վերջիններս կապված են հետքերի և դիվերգենցիաների հետ, որոնք որ առաջանում են փոխազդեցության հիմնական անդամից: Ուղղումներն իհայտ են գալիս գործակիցներով, որոնք որ ռացիոնալ գործակիցներով բազմանդամներ են $d+1$ պարածությունում :

7 Հավելված Ա: Խորանարդային փոխազդեցության հիմնական անդամը հարթ տարածությունում

Այս հավելվածում նորից կգրենք ԲՍ տրամաչափային դաշտերի խորանարդային փոխազդեցության հիմնական անդամը հարթ տարածությունում, որը որ ուսումնասիրվել է [31] և [32]-ում: [31, 32]-ի հիմնական արդյունքը հետևյալն է՝

[31, 32]-ում ուսումնասիրվում է $h^{(s_1)}(X_1; a^A), h^{(s_2)}(X_2; b^A), h^{(s_3)}(X_3; c^A)$ պոտենցիալներն $d+2$ հարթ տարածությունում

$$s_1 \geq s_2 \geq s_3, \tag{Ա.1}$$

և հետևյալ ցիկլիկ անզացը փոխազդեցության համար՝

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_I^{main}(h^{(s_1)}(X_1, a^A), h^{(s_2)}(X_2, b^A), h^{(s_3)}(X_3 c^A)) \\
&\qquad = \sum_{n_i} C^{s_1,s_2,s_3}_{n_1,n_2,n_3} \int d^{d+2}X_1 d^{d+2}X_2 d^{d+2}X_3 \delta(X_3 - X_1)\delta(X_2 - X_1) \\
&\qquad \times \tilde{T}(Q_{12}, Q_{23}, Q_{31}|n_1, n_2, n_3) h^{(s_1)}(X_1; a^A) h^{(s_2)}(X_2; b^B) h^{(s_3)}(X_3; c^C),
\end{aligned} \tag{Ա.2}$$

որտեղ

$$\begin{aligned}
&\tilde{T}(Q_{12}, Q_{23}, Q_{31}|n_1, n_2, n_3) \\
&\qquad = (\partial_{a^A}\partial_{b_A})^{Q_{12}} (\partial_{b^B}\partial_{c_B})^{Q_{23}} (\partial_{c^C}\partial_{a_C})^{Q_{31}} (\partial_{a^D}\tilde{\nabla}_2^D)^{n_1} (\partial_{b^E}\tilde{\nabla}_3^E)^{n_2} (\partial_{c^F}\tilde{\nabla}_1^F)^{n_3},
\end{aligned} \tag{Ա.3}$$

Այստեղ "$main$" դնելով նշանակումը ցուցիչում հասկանում ենք գործողությունը առանց $Divh^{(s_i-1)}$ և $Trh^{(s_i-2)}$. Ածանցյալների քանակն նշանակելով Δ ունենում ենք

$$n_1 + n_2 + n_3 = \Delta. \tag{Ա.4}$$

Այնուհետև պետք է գտնել մինիմալ հնարավոր Δ-ն և օգտագործել:

$$\begin{aligned}
n_1 + Q_{12} + Q_{31} &= s_1, \\
n_2 + Q_{23} + Q_{12} &= s_2, \\
n_3 + Q_{31} + Q_{23} &= s_3.
\end{aligned} \tag{Ա.5}$$

Այս հավասարումներն լուծվում են հետևյալ կերպ՝

$$\begin{aligned}
Q_{12} &= n_3 - \nu_3, \\
Q_{23} &= n_1 - \nu_1, \\
Q_{31} &= n_2 - \nu_2.
\end{aligned} \tag{Ա.6}$$

Քանի որ ձախ կողմը չի կարող լինել բացասական ունենում ենք՝

$$n_i \geq \nu_i.$$

$$\nu_i = 1/2(\Delta + s_i - s_j - s_k), \quad i, j, k \quad \text{արև ալլ դիֆֆերենտ.} \tag{Ա.7}$$

Այսպեղից սպացվում է մինիմալ հնարավոր Δ-ն, որի արտահայտությունը արվել է [18]-ում:.

$$\Delta_{min} = \max\left[s_i + s_j - s_k\right] = s_1 + s_2 - s_3. \tag{Ա.8}$$

[31, 32]-ի մյուս արդյունքը (Ա.2)-ի պրինոմիալ գործակիցների արտահայտությունն է, որը ֆիքսվում է Նյոտերի պրոցեդուրայի ժամանակ: Հաշվի առնելով (Ա.5)-(Ա.8) կարելի է գրել այն հետևյալ տեսքով՝

$$C^{s_1,s_2,s_3}_{n_1,n_2,n_3} \quad = \quad C^{s_1,s_2,s_3}_{Q_{12},Q_{23},Q_{31}} = const \quad \binom{s_{min}}{Q_{12}, Q_{23}, Q_{31}}. \tag{Ա.9}$$

8 Հավելված Բ: ξ_k^{p+1}-երի հաշվարկը $p = 1, \ldots, 4$

Հաշվարկը կսկսենք անել օգտագործելով իտերատիվ մեթոդը p-ի տարբեր արժեքների համար

$$V^{p+1}(i_{p+1}) = \sum_{i_{p=0}}^{i_{p+1}} \phi_{i_p} V^p(i_p), \tag{Բ.1}$$

որտեղ

$$\phi_{i_k} = a^u[2(i_k + k) - s] + [a^2 - (a^u)^2]\partial_{a^u}. \tag{Բ.2}$$

Հաշվելուց հետո, կատարում ենք խմբավորում հետևյալ բանաձևով, որպեսզի ստանանք գործակիցներն:

$$V^{p+1}(i_{p+1}) = \sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]} \xi_k^{p+1}(i_{p+1})(a^2)^k(a^u)^{p-2k}. \tag{Բ.3}$$

և ստանում են ξ_k^{p+1} գործակիցներն.

$$V^2(i_2) = \sum_{i_1=0}^{i_2} \phi_{i_1}|0 >= (1 + i_2)(2 - s + i_2)\, a^u|0 > \tag{Բ.4}$$

$$V^3(i_3) = \sum_{i_1=0}^{i_2} \phi_{i_2} V^2(i_2) = \frac{1}{6}a^2 (1 + i_3)(2 + i_3)(6 - 3s + 2i_3)|0 > \tag{Բ.5}$$

$$+\frac{1}{2}(1 + i_3)(2 + i_3)(2 - s + i_3)(3 - s + i_3)(a^u)^2 |0 >$$

$$V^4(i_4) = \sum_{i_3=0}^{i_4} \phi_{i_3} V^3(i_3) = \frac{1}{6}a^2 (1 + i_4)(2 + i_4)(3 + i_4)(4 - s + i_4)(6 - 3s + 2i_4)\, a^u|0 > \tag{Բ.6}$$

$$+\frac{1}{6}(1 + i_4)(2 + i_4)(3 + i_4)(2 - s + i_4)(3 - s + i_4)(4 - s + i_4)(a^u)^3 |0 >$$

$$V^5(i_5) = \sum_{i_4=0}^{i_5} \phi_{i_4} V^4(i_4) = \frac{1}{360}a^4 (1 + i_5)(2 + i_5)(3 + i_5)(4 + i_5) \tag{Բ.7}$$

$$\left(360 - 270s + 45s^2 + 172i_5 - 60si_5 + 20i_5^2\right)|0 >$$

$$+\frac{1}{12}a^2 (1 + i_5)(2 + i_5)(3 + i_5)(4 + i_5)(4 - s + i_5)(5 - s + i_5)(6 - 3s + 2i_5)(a^u)^2 |0 >$$

$$+\frac{1}{24}(1 + i_5)(2 + i_5)(3 + i_5)(4 + i_5)(2 - s + i_5)(3 - s + i_5)(4 - s + i_5)(5 - s + i_5)(a^u)^4 |0 >$$

Ուսումնասիրելով ξ_k^{p+1} գործակիցների կառուցվածքը նկապում ենք, որ նրանք բոլորը սկսում են հետևյալ ընդհանուր անդամով՝

$$\frac{1}{(p-2k)!}(i+1)_p(2k+2+i-s)_{p-2k} \tag{Բ.8}$$

Այս ինֆորմացիան օգտագործելով գրում ենք ξ_k^{p+1}-ի համար անզաց՝

$$\xi_k^{p+1}(i) = \frac{1}{(p-2k)!}(i+1)_p(2k+2+i-s)_{p-2k}P_k(i) \tag{Բ.9}$$

Որտեղ $P_k(i)$-ն p-ից անկախ բազմանդամ է:

9 Հավելված Գ: Բազմանդամների գործակիցների կառուցվածքը և լուծումը գտնելու իտերատիվ եղանակը

Որպեսզի ավելի լավ պատկերացում կազմենք բազմանդամների գործակիցների մասին, հաշվենք $\tilde{k} = 1, 2, 3, 4 \dots$ տարբեր արժեքների համար հետևյալ արտահայտությունը՝

$$W^{\tilde{k}+1}(a^2, H, i_{\tilde{k}+2}) = \sum_{i_{\tilde{k}+1}=1}^{i_{\tilde{k}+2}} \psi_{i_{\tilde{k}+1}-\tilde{k}} W^{\tilde{k}}(a^2, H, i_{\tilde{k}+1}) \tag{Գ.1}$$

որտեղ

$$\psi_i = iH + [i]_2\, a^2 \tag{Գ.2}$$

և վերածենք արտադրիչների ստացված բազմանդամը H և a^2 փոփոխականներով. Այնուհետև օգտագործելով

$$W^{\tilde{k}}(a^2, H, i_{\tilde{k}+1}) = \sum_{m=0}^{\tilde{k}} \eta^m_{\tilde{k}}(i_{\tilde{k}+1})(a^2)^m H^{\tilde{k}-m} \tag{Գ.3}$$

կստանանք $\eta^m_{\tilde{k}}(i_{\tilde{k}+1})$ գործակիցներն

$$W^1(a^2, H, i_2) = \sum_{i_1=1}^{i_2} \psi_{i_1}\Phi_0(b) = \frac{1}{2}Hi_2\,(1+i_2)\,\Phi_0 + \frac{1}{3}a^2\,(-1+i_2)\,i_2\,(1+i_2)\,\Phi_0 \tag{Գ.4}$$

$$\begin{aligned} W^2(a^2, H, i_3) = \sum_{i_2=1}^{i_3} \psi_{i_2-1} W^1(a^2, H, i_2) = &\frac{1}{8}H^2\,(-1+i_3)\,i_3\,(1+i_3)\,(2+i_3)\,\Phi_0 \\ &+\frac{1}{12}a^2H\,(-1+i_3)\,i_3\,(1+i_3)\,(2+i_3)\,(-3+2i_3)\,\Phi_0 \\ &+\frac{1}{90}a^4\,(-2+i_3)\,(-1+i_3)\,i_3\,(1+i_3)\,(2+i_3)\,(-3+5i_3)\,\Phi_0 \end{aligned} \tag{Գ.5}$$

$$\begin{aligned} W^3(a^2, H, i_4) = \sum_{i_3=1}^{i_4} \psi_{i_3-2} W^2(a^2, H, i_3) = \\ \frac{1}{48}H^3\,(-2+i_4)\,(-1+i_4)\,i_4\,(1+i_4)\,(2+i_4)\,(3+i_4)\,\Phi_0 \\ +\frac{1}{24}a^2H^2\,(-2+i_4)^2\,(-1+i_4)\,i_4\,(1+i_4)\,(2+i_4)\,(3+i_4)\,\Phi_0 \\ +\frac{1}{180}a^4H\,(-2+i_4)\,(-1+i_4)^2 i_4\,(1+i_4)\,(2+i_4)\,(3+i_4)\,(-13+5i_4)\,\Phi_0 \\ +\frac{a^6\,(-3+i_4)\,(-2+i_4)\,(-1+i_4)\,i_4\,(1+i_4)\,(2+i_4)\,(3+i_4)\,(-2-63i_4+35i_4^2)\,\Phi_0}{5670} \end{aligned} \tag{Գ.6}$$

$$W^4(a^2,H,i_5) = \sum_{i_4=1}^{i_5} \psi_{i_4-3} W^3(a^2,H,i_4) = \tag{Գ.7}$$

$$\frac{1}{384}H^4(-3+i_5)(-2+i_5)(-1+i_5)i_5(1+i_5)$$

$$(2+i_5)(3+i_5)(4+i_5)\Phi_0$$

$$+\frac{1}{288}a^2H^3(-3+i_5)(-2+i_5)(-1+i_5)i_5(1+i_5)$$

$$(2+i_5)(3+i_5)(4+i_5)(-5+2i_5)\Phi_0$$

$$+\frac{1}{1440}a^4H^2(-3+i_5)(-2+i_5)(-1+i_5)i_5(1+i_5)(2+i_5)(3+i_5)(4+i_5)$$

$$\left(45-46i_5+10i_5^2\right)\Phi_0$$

$$+\frac{1}{22680}a^6H(-3+i_5)(-2+i_5)(-1+i_5)i_5(1+i_5)(2+i_5)(3+i_5)(4+i_5)$$

$$\left(-195+731i_5-441i_5^2+70i_5^3\right)\Phi_0$$

$$+\frac{1}{340200}a^8(-4+i_5)(-3+i_5)(-2+i_5)(-1+i_5)i_5(1+i_5)(2+i_5)(3+i_5)(4+i_5)$$

$$\left(570+149i_5-630i_5^2+175i_5^3\right)\Phi_0$$

Ուսումնասիրելով $\eta_{\tilde{k}}^m(i)$ գործակիցներն կարելի է տեսնել, որ նրանք հետևյալ տեսքի են՝

$$\eta_{\tilde{k}}^m(i) = \frac{2^{m-\tilde{k}}3^{-m}}{(\tilde{k}-m)!m!}(i-\tilde{k}+1)_{2\tilde{k}}P_m(i,\tilde{k}), \quad P_0(i,\tilde{k}) = 1 \tag{Գ.8}$$

Կարելի է ցույց տալ, որ $P_k(i,p)$ բազմանդամներն բավարարում են հետևյալ ռեկուրենտ հավասարումներին՝

$$(i+p+1)P_k(i,p+1) - (i-p-1)P_k(i-1,p+1) = \tag{Գ.9}$$

$$2(p-k+1)P_k(i,p) + 3k(i-p-1)P_{k-1}(i,p) \tag{Գ.10}$$

Այս հավասարումների լուծումներն կարելի է հաշվել քայլ առ քայլ օգտագործելով (Գ.4)-(Գ.7) ամեն մի k-ի արժեքի համար

$$P_0(i,p) = 1 \tag{Գ.11}$$

$$P_1(i,p) = i - \left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right) \tag{Գ.12}$$

$$P_2(i,p) = i^2 - 2i\left(\frac{p}{2} + \frac{3}{10}\right) + \left(\frac{p^2}{4} + \frac{3p}{20} - \frac{1}{10}\right) \tag{Գ.13}$$

$$P_3(i,p) = i^3 - 3i^2\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{10}\right) + 3i\left(\frac{p^2}{4} - \frac{p}{20} - \frac{67}{210}\right) - \left(\frac{p^3}{8} - \frac{3p^2}{20} - \frac{173p}{280} - \frac{12}{35}\right) \tag{Գ.14}$$

$$\begin{aligned} P_4(i,p) = {} & i^4 - 4i^3\left(\frac{p}{2} - \frac{1}{10}\right) + 6i^2\left(\frac{p^2}{4} - \frac{p}{4} - \frac{481}{1050}\right) \\ & -4i\left(\frac{p^3}{8} - \frac{3p^2}{10} - \frac{1031p}{1400} - \frac{38}{175}\right) + \frac{p^4}{16} - \frac{11p^3}{40} - \frac{2011p^2}{2800} - \frac{89p}{1400} + \frac{111}{350} \end{aligned} \tag{Գ.15}$$

$$\begin{aligned} P_5(i,p) = {} & i^5 - 5i^4\left(\frac{p}{2} - \frac{3}{10}\right) + 10i^3\left(\frac{p^2}{4} - \frac{9p}{20} - \frac{181}{350}\right) \\ & -10i^2\left(\frac{p^3}{8} - \frac{9p^2}{20} - \frac{147p}{200} + \frac{9}{175}\right) + 5i\left(\frac{p^4}{16} - \frac{3p^3}{8} - \frac{351p^2}{560} + \frac{843p}{1400} + \frac{3131}{3850}\right) \\ & -\frac{p^5}{32} + \frac{9p^4}{32} + \frac{421p^3}{1120} - \frac{1587p^2}{1120} - \frac{15839p}{6160} - \frac{12}{11} \end{aligned} \tag{Գ.16}$$

Ստացված լուծումներից ելնելով $P_k(i,p)$-ի համար կարելի է գրել հետևյալ անզացը՝

$$P_k(i,p) = \sum_{n=0}^{k} i^{k-n}(-1)^n \binom{k}{n} B_k^n(p)$$

Ստացված $P_k(i,p)$ լուծումներից հնարավոր է հաշվել $B_k^n(p)$ հետևյալ կերպ [4]

$$B^1{}_k(p) = \frac{p}{2} - \frac{k}{5} + \frac{7}{10} \tag{Գ.17}$$

$$B^2{}_k(p) = \frac{p^2}{4} + p\left(\frac{11}{20} - \frac{k}{5}\right) + \frac{k^2}{25} - \frac{44k}{105} + \frac{607}{1050} \tag{Գ.18}$$

$$B^3{}_k(p) = \frac{p^3}{8} + p^2\left(\frac{3}{10} - \frac{3k}{20}\right) + p\left(\frac{3k^2}{50} - \frac{377k}{700} + \frac{641}{1400}\right) \tag{Գ.19}$$

[4] Որպեսզի հնարավոր լինի հաշվել $B_k^n(p)$ օգտագործելով իտերատիվ մեթոդը, պետք է նախ և առաջ հաշվել $P_m(i,p)$ մինչև $m = 2k$

$$-\frac{k^3}{125}+\frac{293k^2}{1750}-\frac{1313k}{1750}+\frac{108}{175}$$

$$B^4{}_k(p)=\frac{p^4}{16}+p^3\left(\frac{1}{8}-\frac{k}{10}\right)+p^2\left(\frac{3k^2}{50}-\frac{157k}{350}+\frac{13}{112}\right) \tag{Գ.20}$$

$$+p\left(-\frac{2k^3}{125}+\frac{523k^2}{1750}-\frac{131k}{125}+\frac{519}{1400}\right)+\frac{k^4}{625}-\frac{244k^3}{4375}+\frac{47728k^2}{91875}-\frac{460722k}{336875}+\frac{256957}{404250}$$

$$B^5{}_k(p)=\frac{p^5}{32}+p^4\left(\frac{1}{32}-\frac{k}{16}\right)+p^3\left(\frac{k^2}{20}-\frac{251k}{840}-\frac{443}{3360}\right) \tag{Գ.21}$$

$$+p^2\left(-\frac{k^3}{50}+\frac{23k^2}{70}-\frac{2273k}{2800}-\frac{267}{1120}\right)$$
$$+p\left(\frac{k^4}{250}-\frac{223k^3}{1750}+\frac{2969k^2}{2940}-\frac{980587k}{539000}-\frac{97283}{646800}\right)$$
$$-\frac{k^5}{3125}+\frac{439k^4}{26250}-\frac{24404k^3}{91875}+\frac{23911k^2}{16170}-\frac{52309518k}{21896875}-\frac{72612}{398125}$$

$\eta_{\tilde{k}}^m(i)$ գործակիցների վերջնական տեսքը կլինի

$$\eta_{\tilde{k}}^m(i)=\frac{2^{m-\tilde{k}}3^{-m}}{(\tilde{k}-m)!m!}(i-\tilde{k}+1)_{2\tilde{k}}\sum_{n=0}^{m} i^{m-n}(-1)^n\binom{m}{n}B_m^n(\tilde{k}) \tag{Գ.22}$$

Հղումներ

[1] M.Karapetyan, R. Manvelyan, R.Poghossian, “Cubic interaction for higher spins in AdS_{d+1} space in the explicit covariant form”, Nuclear Physics B, **950** (2020), 114876, arXiv:1908.07901 [hep-th], doi 10.1016/j.nuclphysb.2019.114876

[2] M. A. Vasiliev, “Consistent equation for interacting gauge fields of all spins in (3+1)-dimensions.”, Phys. Lett. B **243** (1990) 378-382. M. A. Vasiliev, “ Nonlinear equations for symmetric massless higher spin fields in $(A)dS_d$.” Phys. Lett. B **567** (2003) 139-151, arXiv:hep-th/0304049.

[3] M. A. Vasiliev, “Holography, Unfolding and Higher-Spin Theory,” J. Phys. A **46** (2013) 214013 doi:10.1088/1751-8113/46/21/214013 [arXiv:1203.5554 [hep-th]].

[4] M. A. Vasiliev, “V L Ginzburg and higher-spin fields,” Phys. Usp. **54**, 641 (2011) [Usp. Fiz. Nauk **181**, 665 (2011)].

[5] A. Sagnotti, “Notes on Strings and Higher Spins,” J. Phys. A **46** (2013) 214006 [arXiv:1112.4285 [hep-th]].

[6] J. B. Bae, E. Joung and S. Lal, “Exploring Free Matrix CFT Holographies at One-Loop,” Universe **3** (2017) no.4, 77 [arXiv:1708.04644 [hep-th]].

[7] C. Sleight, “Metric-like Methods in Higher Spin Holography,” PoS Modave **2016** (2017) 003 [arXiv:1701.08360 [hep-th]].

[8] S. Giombi, I. R. Klebanov and Z. M. Tan, “The ABC of Higher-Spin AdS/CFT,” Universe **4** (2018) no.1, 18 doi:10.3390/universe4010018 [arXiv:1608.07611 [hep-th]].

[9] V. E. Didenko and E. D. Skvortsov, “Elements of Vasiliev theory,” arXiv:1401.2975 [hep-th].

[10] C. Fronsdal, “Singletons And Massless, Integral Spin Fields On De Sitter Space (Elementary Particles In A Curved Space Vii),” Phys. Rev. D **20**, (1979) 848;“Massless Fields With Integer Spin,” Phys. Rev. D **18** (1978) 3624.

[11] P. Dempster and M. Tsulaia, *“On the Structure of Quartic Vertices for Massless Higher Spin Fields on Minkowski Background,” Nucl. Phys.* B **865** (2012) 353; `arXiv:1203.5597`.

[12] A. K. H. Bengtsson, *"Investigations into Light-front Quartic Interactions for Massless Fields (I): Non-constructibility of Higher Spin Quartic Amplitudes," JHEP* **1612** (2016) 134; `arXiv:1607.06659`.

[13] M. Taronna, *"On the Non-Local Obstruction to Interacting Higher Spins in Flat Space," JHEP* **1705** (2017) 026; `arXiv:1701.05772`.

[14] R. Roiban and A. A. Tseytlin, *"On four-point interactions in massless higher spin theory in flat space," JHEP* **1704** (2017) 139; `arXiv:1701.05773`.

[15] S. Fredenhagen, O. Krüger and K. Mkrtchyan, "Vertex-Constraints in 3D Higher Spin Theories," arXiv:1905.00093 [hep-th].

[16] S. Fredenhagen, O. Krüger and K. Mkrtchyan, "Constraints for Three-Dimensional Higher-Spin Interactions and Conformal Correlators," arXiv:1812.10462 [hep-th].

[17] A. K. H. Bengtsson, I. Bengtsson and N. Linden, *"Interacting Higher Spin Gauge Fields on the Light Front," Class. Quant. Grav.* **4** (1987) 1333.

[18] R. R. Metsaev, "Cubic interaction vertices for massive and massless higher spin fields," Nucl. Phys. B **759** (2006) 147 [arXiv:hep-th/0512342]; R. R. Metsaev, "Cubic interaction vertices for fermionic and bosonic arbitrary spin fields," arXiv:0712.3526 [hep-th].

[19] R. R. Metsaev, "Cubic interaction vertices for N=1 arbitrary spin massless supermultiplets in flat space," arXiv:1905.11357 [hep-th]; "Cubic interaction vertices for massive/massless continuous-spin fields and arbitrary spin fields," JHEP **1812** (2018) 055 doi:10.1007/JHEP12(2018)055 [arXiv:1809.09075 [hep-th]].

[20] F. A. Berends, G. J. H. Burgers and H. Van Dam, "On Spin Three Selfinteractions," Z. Phys. C **24** (1984) 247; F. A. Berends, G. J. H. Burgers and H. van Dam, "On The Theoretical Problems In Constructing Interactions Involving Higher Spin Massless Particles," Nucl. Phys. B **260** (1985) 295.; F. A. Berends, G. J. H. Burgers and H. van Dam, "Explicit Construction Of Conserved Currents For Massless Fields Of Arbitrary Spin," Nucl. Phys. B **271** (1986) 429;

[21] E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, "On The Gravitational Interaction Of Massless Higher Spin Fields," Phys. Lett. B **189** (1987) 89; E. S. Fradkin and M. A. Vasiliev, "Cubic Interaction In Extended Theories Of Massless Higher Spin Fields," Nucl. Phys. B **291** (1987) 141.

[22] X. Bekaert, N. Boulanger, S. Cnockaert and S. Leclercq, *"On killing tensors and cubic vertices in higher-spin gauge theories," Fortsch. Phys.* **54** (2006) 282; `hep-th/0602092`; N. Boulanger and S. Leclercq, *"Consistent couplings between spin-2 and spin-3 massless fields," JHEP* **0611** (2006) 034; `hep-th/0609221`.

[23] D. Francia, J. Mourad and A. Sagnotti, *"Current exchanges and unconstrained higher spins," Nucl. Phys. B* **773** (2007) 203; `arXiv:hep-th/0701163`.

[24] A. Fotopoulos and M. Tsulaia, *"Gauge Invariant Lagrangians for Free and Interacting Higher Spin Fields. A Review of the BRST formulation," Int. J. Mod. Phys. A* **24** (2009) 1; `arXiv:0805.1346`.

[25] Y. M. Zinoviev, *"On spin 3 interacting with gravity," Class. Quant. Grav.* **26** (2009) 035022; `arXiv:0805.2226`.

[26] I. L. Buchbinder, A. Fotopoulos, A. C. Petkou and M. Tsulaia, "Constructing the cubic interaction vertex of higher spin gauge fields," Phys. Rev. D **74** (2006) 105018; [arXiv:hep-th/0609082].

[27] N. Boulanger, S. Leclercq and P. Sundell, *"On The Uniqueness of Minimal Coupling in Higher-Spin Gauge Theory," JHEP* **0808** (2008) 056; `arXiv:0805.2764`.

[28] R. Manvelyan and K. Mkrtchyan, *"Conformal invariant interaction of a scalar field with the higher spin field in AdS(D)," Mod. Phys. Lett. A* **25** (2010) 1333; `arXiv:0903.0058`;

[29] R. Manvelyan, K. Mkrtchyan and W. Rühl, *"Off-shell construction of some trilinear higher spin gauge field interactions," Nucl. Phys. B* **826** (2010) 1; `arXiv:0903.0243`.

[30] X. Bekaert, E. Joung and J. Mourad, *"On higher spin interactions with matter," JHEP* **0905** (2009) 126; `arXiv:0903.3338`.

[31] R. Manvelyan, K. Mkrtchyan and W. Rühl, *"General trilinear interaction for arbitrary even higher spin gauge fields," Nucl. Phys. B* **836** (2010) 204; `arXiv:1003.2877`.

[32] R. Manvelyan, K. Mkrtchyan and W. Rühl, *"Direct Construction of A Cubic Selfinteraction for Higher Spin gauge Fields," Nucl. Phys. B* **844** (2011) 348; `arXiv:1002.1358`.

[33] A. Sagnotti and M. Taronna, *"String Lessons for Higher-Spin Interactions," Nucl. Phys. B* **842** (2011) 299; `arXiv:1006.5242`.

[34] A. Fotopoulos and M. Tsulaia, *"On the Tensionless Limit of String theory, Off - Shell Higher Spin Interaction Vertices and BCFW Recursion Relations," JHEP* **1011** (2010) 086; `arXiv:1009.0727`.

[35] R. Manvelyan, K. Mkrtchyan and W. Rühl, *"A Generating function for the cubic interactions of higher spin fields," Phys. Lett. B* **696** (2011) 410; `arXiv:1009.1054`.

[36] Yu.M. Zinoviev, "Spin 3 cubic vertices in a frame-like formalism." JHEP 1008:084,2010; arXiv:1007.0158 [hep-th]

[37] M. A. Vasiliev, "Cubic Vertices for Symmetric Higher-Spin Gauge Fields in $(A)dS_d$," Nucl. Phys. B **862** (2012) 341 doi:10.1016/j.nuclphysb.2012.04.012 [arXiv:1108.5921 [hep-th]].

[38] N. Boulanger, D. Ponomarev and E. D. Skvortsov, *"Non-abelian cubic vertices for higher-spin fields in anti-de Sitter space," JHEP* **1305** (2013) 008; `arXiv:1211.6979`.

[39] K. Mkrtchyan, "Cubic interactions of massless bosonic fields in three dimensions," Phys. Rev. Lett. **120** (2018) no.22, 221601 doi:10.1103/PhysRevLett.120.221601 [arXiv:1712.10003 [hep-th]].

[40] P. Kessel and K. Mkrtchyan, "Cubic interactions of massless bosonic fields in three dimensions II: Parity-odd and Chern-Simons vertices," Phys. Rev. D **97** (2018) no.10, 106021 doi:10.1103/PhysRevD.97.106021 [arXiv:1803.02737 [hep-th]].

[41] E. Conde, E. Joung and K. Mkrtchyan, JHEP **1608** (2016) 040 doi:10.1007/JHEP08(2016)040 [arXiv:1605.07402 [hep-th]].

[42] E. Joung and M. Taronna, "Cubic interactions of massless higher spins in (A)dS: metric-like approach," Nucl. Phys. B **861** (2012) 145 [arXiv:1110.5918 [hep-th]].

[43] E. Joung, L. Lopez and M. Taronna, "On the cubic interactions of massive and partially-massless higher spins in (A)dS," JHEP **1207** (2012) 041 doi:10.1007/JHEP07(2012)041 [arXiv:1203.6578 [hep-th]].

[44] C. Sleight and M. Taronna, "Higher Spin Interactions from Conformal Field Theory: The Complete Cubic Couplings," Phys. Rev. Lett. **116** (2016) no.18, 181602 doi:10.1103/PhysRevLett.116.181602 [arXiv:1603.00022 [hep-th]].

[45] D. Francia, G. L. Monaco and K. Mkrtchyan, "Cubic interactions of Maxwell-like higher spins," JHEP **1704** (2017) 068 doi:10.1007/JHEP04(2017)068 [arXiv:1611.00292 [hep-th]].

[46] R. Manvelyan, R. Mkrtchyan and W. Rühl, *"Radial Reduction and Cubic Interaction for Higher Spins in (A)dS space,"* Nucl. Phys. B **872** (2013) 265; doi:10.1016/j.nuclphysb.2013.03.015 `arXiv:1210.7227`.

[47] E. Joung, L. Lopez and M. Taronna, "Solving the Noether procedure for cubic interactions of higher spins in (A)dS," J. Phys. A **46** (2013) 214020 doi:10.1088/1751-8113/46/21/214020 [arXiv:1207.5520 [hep-th]].

[48] T. Biswas and W. Siegel, "Radial dimensional reduction: Anti-de Sitter theories from flat," JHEP **0207** (2002) 005 [hep-th/0203115].

[49] K. Hallowell and A. Waldron, "Constant curvature algebras and higher spin action generating functions," Nucl. Phys. B **724** (2005) 453 [hep-th/0505255].

[50] S. Giombi, "Higher Spin – CFT Duality," $doi : 10.1142/9789813149441_0003$ arXiv:1607.02967 [hep-th].

[51] R. Rahman and M. Taronna, "From Higher Spins to Strings: A Primer," arXiv:1512.07932 [hep-th].

[52] A. K. H. Bengtsson, I. Bengtsson and L. Brink, "Cubic Interaction Terms For Arbitrary Spin," Nucl. Phys. B **227** (1983) 31. "Cubic Interaction Terms For Arbitrarily Extended Supermultiplets," Nucl. Phys. B **227** (1983) 41.