სადოქტორო დისერტაციის დაცვა ფიზიკაში
2023 ოქტომბერი 11

სპლიტ ოქტონიონების გამოყენება ველის თეორიის ზოგიერთი ამოცანისათვის

ალექსანდრე ღურჭუმელია

ხელმძღვანელი: ასოც. პროფესორი **მერაბ გოგბერაშვილი**

ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ფიზიკის დეპარტამენტი

სტანდარტული მოდელის პრობლემები

- ნეიტრინოს მასის პრობლემა
- იერარქიის პრობლემა
- სამყაროს ფარული კომპონენტების პრობლემა
- გრავიტაციასთან გაერთიანების პრობლემა

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = &-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&+ i \bar{\psi} \not{D} \psi + h.c. \\
&+ \bar{\psi}_i y_{ij} \psi_j \phi + h.c. \\
&+ |D_\mu \phi|^2 - V(\phi)
\end{aligned}
$$

სტანდარტული მოდელის ლაგრანჟიანი

არსებობს პრობლემების გადასაჭრელი სხვადასხვა მოდელები: სუპერსიმეტრია, სიმების თეორია და ა.შ., რომლებიც მოითხოვენ ახალი მათემატიკური აპარატის შემოტანას. ამ მიმართულებით მნიშვნელოვანია **გაყოფადი ალგებრები** (ანუ **ჰურვიცის** ალგებრები) [Kugo, Townsend 1983; Evans 1988; Baez & Huerta 2009, 2011]

(სპლიტ) ოქტონიონების კვლევა ფიზიკაში

- ჰიპერკომპლექსური რიცხვები ($\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, გრასმანის ალგებრა და სხვა) მნიშვნელოვან როლს თამაშობენ ფიზიკაში
- გაყოფადი ალგებრები ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ და $\mathbb{O}$) უკავშირდება სუპერსიმეტრიებს

$\mathbb{O}$ **ოქტონიონები ფიზიკაში**

- ფერის სიმეტრია [Gunaydin, Gursey 1973; Morita 1981], დიდი გაერთიანების თეორია [Sudbery 1984, Dixon 1990; Castro 2007], კვანტური მექანიკის აქსიომატიკა [Gunaydin, Piron, Ruegg 1978], ასოციატორით დაკვანტვა [Lohmus, Paal, Sorgsepp 1998], M-თეორია [Lukierski, Toppan 2002], და სხვა.

$\mathbb{O}'$ **სპლიტ ოქტონიონები ფიზიკაში**

- ნაწილაკების თაობები [Gunaydin, Gursey 1974, Silagadze 1995], ელექტროდინამიკა [Nash 1989], გრავიტაცია [Nash 2010], ფიზიკური სივრცის გეომეტრია [Gogberashvili 2009, 2015].

ჩვენი კვლევა

გრძელვადიანი მიზნები

- გაყოფადი ალგებრების და მათი სპლიტ ვერსიების მნიშვნელობის დადგენა ფიზიკაში
- სუპერსიმეტრიული თეორიის მსგავსი თეორიის ჩამოყალიბება სპლიტ ოქტონიონების გამოყენებით
- სპლიტ ოქტონიონი როგორც უნივერსალური ობიექტი ფიზიკაში?

გადაჭრილი ამოცანები

- ტრიალობის სიმეტრიის შესწავლა (4+4) ვექტორებს და სპინორებს შორის
- დირაკის და თავისუფალი მაქსველის სისტემების განზოგადება სპლიტ ოქტონიონური $\mathbb{O}' \to \mathbb{O}'$ ფუნქციებით
- სპლიტ ოქტონიონების ავტომორფიზმის G_2 ჯგუფის შესაძლო ფიზიკური მნიშვნელობის შესწავლა

კეილი-დიქსონის კონსტრუქციები

ინვოლუციური $\mathbb{A}_n$ ალგებრით აიგება $\mathbb{A}_{n+1} = \mathbb{A}_n \otimes \mathbb{A}_n$ ალგებრა სადაც

$$\begin{aligned} &(a,b)\,(c,d) = (ac - \gamma d^* b, da + bc^*) \ , \qquad (\gamma = \pm 1) \\ &(a,b)^* = (a^*, -b) \ . \end{aligned}$$

თუ $\mathbb{A}_0 = \mathbb{R}$ და $\gamma = +1$ მაშინ $\mathbb{R} \to \mathbb{C} \to \mathbb{H} \to \mathbb{O} \to \mathbb{S} \to \cdots$.
$\gamma = -1$ შემთხვევაში მიიღება სპლიტ ვერსიები $\mathbb{C}'$, $\mathbb{H}'$, $\mathbb{O}'$.

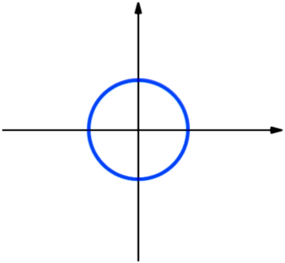
	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{O}$	$\mathbb{S}$	$\cdots$	$\mathbb{A}_n$
განზომილება:	1	2	4	8	16	$\cdots$	2^n
დალაგება: $a < b$	✓	✗	✗	✗	✗	$\cdots$	✗
კომუტაციურობა: $ab = ba$	✓	✓	✗	✗	✗	$\cdots$	✗
ასოციატიურობა: $a\,(bc) = (ab)\,c$	✓	✓	✓	✗	✗	$\cdots$	✗
ალტერნატიულობა: $(xx)\,y = x\,(xy)$	✓	✓	✓	✓	✗	$\cdots$	✗

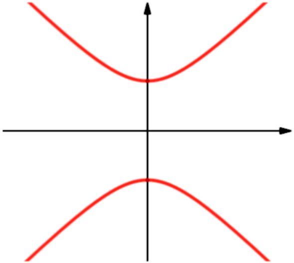
მხოლოდ $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ და $\mathbb{H}$ ალგებრებია წარმოდგინდა მატრიცებით,
მაგ.: $i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

ევკლიდური და ჰიპერბოლური გეომეტრია

$\mathbb{C}$ | $\mathbb{C}'$

$i^2 = -1$ | $j^2 = 1$





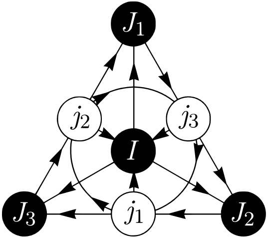
$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\exp(j\varphi) = \cosh\varphi + j\sinh\varphi$$

სპლიტ ოქტონიონები $\mathbb{O}'$

- განმსაზღვრელი ალგებრული თანადობებია

$$
\begin{aligned}
&j_m j_n = -\delta_{mn} + \textstyle\sum_k \epsilon_{mnk} j_k \,, \\
&I^2 = 1 \,, \qquad\qquad j_n I = J_n \,, \\
&J_m J_n = \delta_{mn} + \textstyle\sum_k \epsilon_{mnk} j_k \,, \\
&J_m j_n = \delta_{mn} I - \textstyle\sum_k \epsilon_{mnk} J_k \,. \\
&\quad (m, n, k = 1, 2, 3)
\end{aligned}
$$



ფანოს სიბრტყე

- $x \in \mathbb{O}'$ სპლიტ ოქტონიონური რიცხვი

$$x = x_0 + I x_4 + \sum_{n=1}^{3} \left(j_n x_n + J_n x_{4+n} \right)$$

- მისი შეუღლებული

$$\overline{x} = x_0 - I x_4 - \sum_{n=1}^{3} \left(j_n x_n + J_n x_{4+n} \right) \,.$$

სიმბოლური გამოთვლები

SplitOct_arithmetics.ipynb

Code

[1]:
```python
from SplitOct import *
```

[2]:
```python
x = (5 + 3*j2 - J3) * (j1 + J2 - J3)
display(x)
```

$$1 + 6j_1 - 3j_3 - 3I + 3J_1 + 6J_2 - 5J_3$$

[3]:
```python
y = x.conj()
display(y)
```

$$1 - 6j_1 + 3j_3 + 3I - 3J_1 - 6J_2 + 5J_3$$

[4]:
```python
x * y
```

[4]: -33

[Gurchumelia, A. (2023). SplitOct [Computer software] github.com/EQUINOX24/SplitOct]

წრფივი ფორმები $\mathbb{O}'$-ზე

- კვადრატული ფორმა $\mathcal{Q} : \mathbb{O}' \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(x) &= \overline{x}x \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{3} \left(x_n^2 - x_{4+n}^2\right) \ .\end{aligned}$$

- სიმეტრიული ორწრფივი არაგადაგვარებული $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{O}' \times \mathbb{O}' \to \mathbb{R}$ ფორმა

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{2}\mathcal{Q}(x+y) - \frac{1}{2}\mathcal{Q}(x) - \frac{1}{2}\mathcal{Q}(y) \\ &= \frac{1}{2}\left(\overline{x}y + \overline{y}x\right) \\ &= \textstyle\sum_{n=0}^{3} \left(x_n y_n - x_{4+n} y_{4+n}\right) \ .\end{aligned}$$

- სამწრფივი $\mathcal{F} : \mathbb{O}' \times \mathbb{O}' \times \mathbb{O}' \to \mathbb{R}$ ფორმა

$$\mathcal{F}(\phi, \chi, \psi) = \left\langle \overline{\phi}, \chi\psi \right\rangle \ .$$

$SO\,(4,4)$ და $Spin\,(4,4)$ სპლიტ ოქტონიონებით

- ჩვეულებრივი ოქტონიონებისთვის $\mathbb{O}$, $SO\,(8)$ და $Spin(8)$ ჯგუფების წარმოდგენა[Dray, Manogue 2015]
- ორთოგონალური ჯგუფების $\mathbb{O}'$ წარმოდგენა

$$\begin{aligned} SO\,(4,4) : \chi' &= T_{uv}\,(\vartheta)\,(u\chi u)\,T_{uv}\,(\vartheta) \\ Spin\,(4,4) : \phi' &= u^2\,(\phi u)\,T_{uv}\,(s_u\vartheta)\ , \\ \psi' &= u^2 T_{uv}\,(s_u\vartheta)\,(u\psi)\ , \end{aligned}$$

სადაც $u, v \in \text{basis}\,(\mathbb{O}')$ და

$$T_{uv}\,(\vartheta) = \begin{cases} u\cos\frac{\vartheta}{2} + v\sin\frac{\vartheta}{2}, & u\bar{u} = v\bar{v} \\ u\cosh\frac{\vartheta}{2} + v\sinh\frac{\vartheta}{2}, & u\bar{u} = -v\bar{v} \end{cases}$$

$$s_u = \left|u\bar{u} - u^2\right| - 1 = \pm 1$$

ტრიალობის სიმეტრია

- $\mathbb{O}$ ჩვეულებრივი ოქტონიონებისთვის `[Gamba 1968]`
- $u = 1$, $v = j_1$ ($\mathcal{C}\ell_{4,4}(\mathbb{R})$ ენაზე $L_{01}(\vartheta)$) გარდაქმნა

$$\begin{cases} \phi_0' = \phi_0 + \frac{1}{2}\vartheta\phi_1 \\ \phi_1' = \phi_1 - \frac{1}{2}\vartheta\phi_0 \\ \phi_2' = \phi_2 - \frac{1}{2}\vartheta\phi_3 \\ \phi_3' = \phi_3 + \frac{1}{2}\vartheta\phi_2 \\ \phi_4' = \phi_4 - \frac{1}{2}\vartheta\phi_5 \\ \phi_5' = \phi_5 + \frac{1}{2}\vartheta\phi_4 \\ \phi_6' = \phi_6 + \frac{1}{2}\vartheta\phi_7 \\ \phi_7' = \phi_7 - \frac{1}{2}\vartheta\phi_6 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x_0' = x_0 - \vartheta x_1 \\ x_1' = x_1 + \vartheta x_0 \\ x_2' = x_2 \\ x_3' = x_3 \\ x_4' = x_4 \\ x_5' = x_5 \\ x_6' = x_6 \\ x_7' = x_7 \end{cases}, \qquad \begin{cases} \psi_0' = \psi_0 + \frac{1}{2}\vartheta\psi_1 \\ \psi_1' = \psi_1 - \frac{1}{2}\vartheta\psi_0 \\ \psi_2' = \psi_2 + \frac{1}{2}\vartheta\psi_3 \\ \psi_3' = \psi_3 - \frac{1}{2}\vartheta\psi_2 \\ \psi_4' = \psi_4 + \frac{1}{2}\vartheta\psi_5 \\ \psi_5' = \psi_5 - \frac{1}{2}\vartheta\psi_4 \\ \psi_6' = \psi_6 - \frac{1}{2}\vartheta\psi_7 \\ \psi_7' = \psi_7 + \frac{1}{2}\vartheta\psi_6 \end{cases}.$$

- χ-სთვის ვაგებთ ისეთი გარდაქმნა რომელიც იმეორებს ϕ-ს

$$L_{10}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) L_{23}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) L_{54}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) L_{67}\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \simeq$$

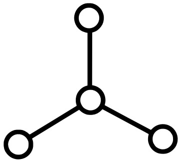
$$1 - \frac{1}{4}\vartheta\left(\mathit{\Gamma}_1\mathit{\Gamma}_0 + \mathit{\Gamma}_2\mathit{\Gamma}_3 + \mathit{\Gamma}_5\mathit{\Gamma}_4 + \mathit{\Gamma}_6\mathit{\Gamma}_7\right),$$

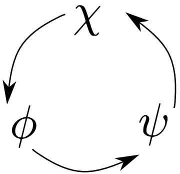
ტრიალობის სიმეტრია

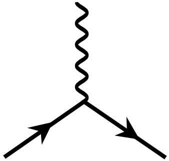
- ვიღებთ

$$
\begin{cases}
\phi_0' = \phi_0 + \frac{1}{2}\vartheta\phi_1 \\
\phi_1' = \phi_1 - \frac{1}{2}\vartheta\phi_0 \\
\phi_2' = \phi_2 + \frac{1}{2}\vartheta\phi_3 \\
\phi_3' = \phi_3 - \frac{1}{2}\vartheta\phi_2 \\
\phi_4' = \phi_4 + \frac{1}{2}\vartheta\phi_5 \\
\phi_5' = \phi_5 - \frac{1}{2}\vartheta\phi_4 \\
\phi_6' = \phi_6 - \frac{1}{2}\vartheta\phi_7 \\
\phi_7' = \phi_7 + \frac{1}{2}\vartheta\phi_6
\end{cases},
\qquad
\begin{cases}
x_0' = x_0 + \frac{1}{2}\vartheta x_1 \\
x_1' = x_1 - \frac{1}{2}\vartheta x_0 \\
x_2' = x_2 - \frac{1}{2}\vartheta x_3 \\
x_3' = x_3 + \frac{1}{2}\vartheta x_2 \\
x_4' = x_4 - \frac{1}{2}\vartheta x_5 \\
x_5' = x_5 + \frac{1}{2}\vartheta x_4 \\
x_6' = x_6 + \frac{1}{2}\vartheta x_7 \\
x_7' = x_7 - \frac{1}{2}\vartheta x_6
\end{cases},
\qquad
\begin{cases}
\psi_0' = \psi_0 - \vartheta\psi_1 \\
\psi_1' = \psi_1 + \vartheta\psi_0 \\
\psi_2' = \psi_2 \\
\psi_3' = \psi_3 \\
\psi_4' = \psi_4 \\
\psi_5' = \psi_5 \\
\psi_6' = \psi_6 \\
\psi_7' = \psi_7
\end{cases}.
$$

- ეს უკავშირდება $SO(4,4)$-ს D_4 დინკინის დიაგრამის სიმეტრიას







გრადიენტები $\mathbb{O}' \to \mathbb{O}'$ ფუნქციებისთვის

- როგორც ჩვეულებრივი ოქტონიონებისთვის [Kauhanen & Orelma, 2018]

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\partial_0 + I\partial_4\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\left(j_n\partial_n + J_n\partial_{4+n}\right) ,$$

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\partial_0 - I\partial_4\right) - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\left(j_n\partial_n + J_n\partial_{4+n}\right) .$$

- $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ და $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ფუნქციების წარმოებულებისთვის ადგილი აქვს

$$\frac{\partial}{\partial x}x^n = nx^{n-1} , \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{x}}\overline{x}^n = n\overline{x}^{n-1} , \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{x}}f\left(x\right) = \frac{\partial}{\partial x}f\left(\overline{x}\right) = 0 .$$

- $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$, $\mathbb{H}'$, $\mathbb{O}'$ ალგებრებისთვის ეს მხოლოდ წრფივი ფუნქციებისთვის სრულდება

$$\partial x = \overline{\partial}\overline{x} = 1 , \qquad \overline{\partial}x = \partial\overline{x} = 0$$

ანალიზურობის პირობა და ლაგრანჟიანი

- $\mathcal{F}(\phi,\chi,\psi) = \langle\overline{\phi},\chi,\psi\rangle$ სამწრფივ ფორმაში $\chi \to \overrightarrow{\partial}$ ჩანაცვლებით ვიღებთ ლაგრანჟიანს
$$\mathcal{L} = \left\langle \overline{\phi}, \overrightarrow{\partial}\psi \right\rangle .$$
- ქმედების ინტეგრალია
$$S = \int d^8x\mathcal{L} .$$
- ქმედების სტაციონარიზებით მიიღება დამოუკიდებელი მარჯვენა და მარცხენა ანალიზურობის პირობები
$$\begin{cases} \phi\overleftarrow{\partial} & =0 , \\ \overrightarrow{\partial}\psi & =0 . \end{cases}$$

  თითოეული ეს განტოლება არის კოში-რიმანის ($\mathbb{C}$) და კოში-რიმან-ფუტერის ($\mathbb{H}$) განტოლების განზოგადება სპლიტ ოქტონიონებზე ($\mathbb{O}'$).

კვადრატული ლაგრანჟიანი

- $SO(4,4)$ და $Spin\,(4,4)$ ინვარიანტობის დაურღვევლად ვამატებთ კვადრატულ წევრებს

$$\mathcal{L} = \left\langle \overline{\phi}, \overrightarrow{\partial}\psi \right\rangle + \frac{1}{2}\lambda_1 \langle \phi, \phi \rangle + \frac{1}{2}\lambda_2 \langle \psi, \psi \rangle$$

- მისი მოძრაობის განტოლებებია

$$\begin{cases} \overrightarrow{\overline{\partial}}\,\overline{\phi} = \lambda_2 \psi\ , \\ \overrightarrow{\partial}\psi = -\ \lambda_1 \overline{\phi}\ . \end{cases}$$

- თუ $\lambda_2 = 0$ მიიღება ტალღური განტოლების (უმასო კლაინ-გორდონის) მსგავსი 8 ცალი განტოლება (4+4)-სივრცეში

$$\left\langle \overrightarrow{\partial}, \overrightarrow{\partial} \right\rangle \psi = 0\,.$$

$\mathbb{O}'$ თავისუფალი მაქსველის სისტემა

- შემოგვყავს ელ-მაგნიტური და დიონური ველები და 4-პოტენციალები

$$A = \mathcal{C}_0 + j_1\mathcal{A}_1 + j_2\mathcal{A}_2 + j_3\mathcal{A}_3 + I\mathcal{A}_0 + J_1\mathcal{C}_1 + J_2\mathcal{C}_2 + J_3\mathcal{C}_3\,.$$
$$F = \overrightarrow{D}A$$

სადაც $D = I\partial I = \frac{1}{2}(\partial_0 + I\partial_4) - \frac{1}{2}\sum_n (j_n\partial_n + J_n\partial_{4+n})$.

- კვადრატული ლაგრანჟიანი $\phi = \overline{F}$, $\psi = A$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_1 = -1$ შემთხვევაში

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}\langle F, F\rangle \qquad \rightarrow \qquad \left\langle \overrightarrow{D}, \overrightarrow{D} \right\rangle A = 0\,.$$

- სტანდარტული მაქსველი მიიღება ზღვარში $D \rightarrow \mathscr{D} = \frac{1}{2}(-j_1\partial_x - j_2\partial_y - j_3\partial_z + I\partial_t)$

$$\left\langle \overrightarrow{\mathscr{D}}, \overrightarrow{\mathscr{D}} \right\rangle A = 0\,.$$

დირაკის სისტემა 4+4 სივრცეში

- ლაგრანჟიანი
$$\mathcal{L} = \left\langle \overline{\phi}, \left(\overrightarrow{D} - mJ_3\right)\psi \right\rangle \,,$$
- მოძრაობის განტოლება
$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\overline{D}} - J_3 m\right)\overline{\phi} = 0\,, \\ \left(\overrightarrow{D} - J_3 m\right)\psi = 0\,, \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \left(\overrightarrow{\overline{\mathscr{D}}} - J_3 m\right)\overline{\phi} = 0\,, \\ \left(\overrightarrow{\mathscr{D}} - J_3 m\right)\psi = 0\,. \end{cases}$$

  იგივე $D \rightarrow \mathscr{D}$ ზღვარში დადის დირაკის განტოლებაზე
- ლაგრანჟიანი ერთი ველით
$$\mathcal{L} = \left\langle -J_3\psi, \left(\overrightarrow{\mathscr{D}} - \frac{1}{2}J_3 m\right)\psi \right\rangle \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{\mathscr{D}}\psi = \frac{1}{2}J_3 m\psi$$

დირაკის განტოლება გარეშე პოტენციალში

განტოლება

$$\left(\mathscr{D} - \frac{1}{2} J_3 m\right) \psi = \frac{1}{2} J_3 \left(\mathbf{conj}_{Ij} \left(A\psi\right) I\right)$$

სადაც

$$\mathbf{conj}_u x = u^2 \left(u \bar{x} u\right)$$

გადასაჭრელი ამოცანები

- გრასმანის რიცხვებთან მსგავსების გამოყენებით

$$h^{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm I\right), \qquad g_n^{\pm} = \frac{1}{2}\left(j_n \pm J_n\right)$$

$$\begin{aligned} h^+ h^- &= 0\,, \\ g_n^+ g_n^+ &= 0\,, \\ g_n^- g_n^- &= 0\,, \end{aligned}$$

  ფერმიონებს და ბოზონებს შორის სუპერსიმეტრიული თეორიის მსგავსი თეორიის აგება და მათი ურთიერთქმედების მიღება
- $\mathbb{O}'$ ალგებრის სიმეტრიებით შინაგანი და დრო-სივრცითი სიმეტრიების გაერთიანება...

არაკომპაქტური G_2 ჯგუფი

- სპლიტ ოქტონიონური $\mathbb{O}'$ ალგებრის ავტომორფიზმის ჯგუფი არის განსაკუთრებული ლის ჯგუფი სახელად არაკომპაქტური G_2

$$\begin{aligned} \mathbb{O} \quad &: \quad G_2 < SO(7) < SO(8) \\ \mathbb{O}' \quad &: \quad G_2^{NC} < SO(3,4) < SO(4,4) \end{aligned}$$

- გამოყვანილია კაზიმირის ოპერატორი ცნობილი ალგორითმით `[Gruber & O'Raifeartaigh 1964 S theorem and construction of the invariants of the semisimple compact Lie algebras]`
- მოიძებნა მისი ჯგუფის წარმოდგენის და $\mathfrak{g}_2$ ლის ალგებრის ისეთი ბაზისები სადაც მეტრიკა დიაგონალურია და კაზიმირის ოპერატორი გამოდის წარმომქმნელების კვადრატების ჯამი

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_2 &= 2\sum_{i,j} X_{ij}^2 - \frac{2}{3}\sum_k \left(X_{k0}X_{0k} + X_{0k}X_{k0}\right) \\ &= \sum_k \left(\frac{1}{3}\Theta_k^2 - \frac{1}{3}\mathrm{B}_k^2 + \Gamma_k^2 - \mathrm{R}_k^2 + 2\Phi_k^2\right), \end{aligned}$$

კაზიმირის ოპერატორი

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_2 = 6\left(t\frac{\partial}{\partial t} + \sum_k \left(\lambda_k \frac{\partial}{\partial \lambda_k} + x_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)\right) \\
+ 2t \sum_k \left(x_k \frac{\partial^2}{\partial t \partial x_k} + \lambda_k \frac{\partial^2}{\partial t \partial \lambda_k}\right) - \frac{2}{3}\sum_{i,j} \lambda_i x_j \frac{\partial^2}{\partial \lambda_i \partial x_j} \\
+ \sum_{i,j,k} |\epsilon_{ijk}| \left(x_i x_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} - x_i^2 \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \lambda_i \lambda_j \frac{\partial}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} - \lambda_i^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda_j^2}\right) \\
+x^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \sum_k \frac{\partial^2}{\partial \lambda_k^2}\right) - t^2 \sum_k \left(\frac{\partial^2}{\partial \lambda_k^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right) - \lambda^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\right),
\end{aligned}
$$

ზღვარში როცა $\lambda = \text{const}$ მიიღება $\mathcal{C}_2|_{\lambda=\text{const}} = \mathcal{C}_{\text{Lorentz}} - \lambda^2 P_\mu P^\mu$
სადაც $\mathcal{C}_{\text{Lorentz}} = \sum_n \left(K_n^2 - L_n^2\right)$

შედეგები

$SO\,(4,4)$ და $Spin\,(4,4)$ ინვარიანტული სამწრფივი ფორმით აგებულ იქნა სპლიტ ოქტონიონური $\mathbb{O}' \to \mathbb{O}'$ ფუნქციების (ფსევდო)ანალიზურობის პირობის შესაბამისი ლაგრანჟიანი.

- მიღებული ლაგრანჟიანი სხვადასხვა ზღვარში დადის მაქსველის და დირაკის თეორიებზე.
- ეს უკანასკნელი ფაქტი და 8 განზომილებიანი სივრცის ტრიალობის სიმეტრია სპინორებს და ვექტორს შორის, შესაძლებელს ხდის ფერმიონებს და ბოზონებს შორის სიმეტრიის აღდგენას მსგავსად სუპერსიმეტრიული თეორიებისა გრასმანის რიცხვების შემოყვანის გარეშე.

$\mathbb{O}'$ სპლიტ ოქტონიონების ავტომორფიზმის ჯგუფისთვის (არაკომპაქტური G_2) მიღებულია მისი შესაბამისი $\mathfrak{g}_2$ ლის ალგებრის კაზიმირის ოპერატორის გამოსახულება

- ნაჩვენებია რომ ზღვარში შეიცავს ლორენცის და პუანკარეს ალგებრების კაზიმირის ოპერატორებს.
- ამ ჯგუფის გეომეტრიული ინტერპრეტაცია ზღვარში გვაძლევს პუანკარეს ჯგუფის ტრანსლაციების იმიტაციას

გმადლობთ ყურადღებისთვის!

გამოქვეყნებული ნაშრომები

- Gogberashvili, M., & Gurchumelia, A. (2019). Geometry of the non-compact G(2). Journal of Geometry and Physics, 144, 308-313.
- Gurchumelia, A., & Gogberashvili, M. (2021). Split Octonions and Triality in (4+4)-Space. Recent Advances in Mathematical Physics, Proceeding of Science Regio 394, 008 doi: 10.22323/1.394.0008;
- Gogberashvili, M., & Gurchumelia, A. (2023). Dirac and Maxwell Sys- tems in Split Octonions. Journal of Applied Mathematics and Physics, 11(7), 1977-1995.
- Kapanadze, B., Gurchumelia, A., & Aller, M. (2023). Long-term X-ray outbursts in the TeV- detected blazar Mrk 501 in 2021-2022: further clues for the emission and unstable processes. Astrophys. J. Suppl. Ser., 268(1), 20.

სამეცნიერო ფორუმებში მონაწილეობა

- School and Workshop "Frontiers of QCD", 2019 Sep 26-28, Tbilisi, Georgia
- School and Workshop "Recent Advances in Fundamental Physics", 2022 Sep 24-26, Tbilisi, Georgia
- RDP School and Workshop on Mathematical Physics, 2023 Aug 19-24, Yerevan, Armenia

მადლიერი ვარ **ფოლკსვაგენის** (Volkswagen Foundation Ref. 93 562) და **შოთა რუსთაველის საქართველოს ეროვნული სამეცნიერო ფონდის** (#04/48) ერთობლივი გრანტისთვის.