

Диссертация на соискание степени доктора

физико-математических наук

01.04.02 – Теоретическая физика

Физический факультет

Ереванский Государственный Университет

**Точные методы в одномерных и квази-одномерных
системах**

Тигран Акопян

Ереван 2013

Оглавление

Введение	5
1 Интегралы движения сферической механики	25
1.1 Угловая часть рациональной модели Калоджеро	25
1.2 Угловая часть системы Калоджеро как обобщение осциллятора Хиггса	29
1.2.1 Трехчастичное Калоджеро и система Якоби на окружности .	31
1.2.2 Редукция четырехчастичной системы на сферу	33
1.3 Угловая часть системы Калоджеро как редукция матричной модели	37
1.3.1 Соответствие матричной модели	37
1.3.2 Интегралы движения сферической механики	41
1.3.3 Независимые инварианты и предел свободных частиц.	48
1.4 Аналогия с состояниями спиновых синглетов, образованных валент- ными связями	50
1.5 Инварианты произвольной сферической механики	57
1.5.1 Сферическая механика	57
1.5.2 Константы движения сферической механики	60
1.5.3 Четырехчастичная модель Калоджеро	66
1.6 Приложения	70
1.6.1 Генераторы групп $U(N)$ и $SU(N)$	70
1.6.2 Малые d матрицы Вигнера.	72

1.6.3	Коэффициенты Клебша-Гордана	73
2	Фазовая диаграмма фрустрированной спиновой лестницы	75
2.1	Фрустрированная спиновая лестница	75
2.2	Идентификация различных фаз	81
2.2.1	Две топологически различные фазы Холдейна	81
2.2.2	Антиферромагнитные цепочки Гайзенберга спина $1/2$	84
2.2.3	Ферромагнитное состояние	84
2.3	Алгоритм DMRG с подходящими граничными условиями	86
2.4	Зигзагообразная цепочка	88
2.5	Общая фазовая диаграмма	93
2.5.1	Некоторые точные критические линии и поверхности	93
2.5.2	Фазовая диаграмма в целом	98
2.6	Обсуждение	107
3	Упорядочение энергетических уровней для фрустрированной спиновой лестницы	109
3.1	Введение	109
3.1.1	Теорема Либа-Матиса для двухподрешеточных систем	110
3.1.2	Фрустрированные спиновые системы	111
3.1.3	Обобщение теоремы Либа-Матиса для фрустрированных лестничных систем	113
3.1.4	Фрустрированные спиновые лестницы	114
3.2	Упорядочение уровней энергии фрустрированной спиновой лестницы	115
3.2.1	Гамильтониан фрустрированной лестницы и ее симметрии	115
3.2.2	Отрицательный базис	118
3.2.3	Относительные основные состояния в $S^z = M$, $\mathcal{R} = \sigma$ подпространствах	122

3.2.4	Упорядочение минимальных уровней энергии в различных спиновых секторах	124
3.3	Основное состояние	126
3.3.1	Точные результаты	126
3.3.2	Термодинамический предел и сравнение с другими подходами	128
3.4	Сравнение с известными результатами	131
3.4.1	Ферромагнитные поперечные взаимодействия	131
3.4.2	Ферромагнитное взаимодействие вдоль диагоналей	132
3.4.3	Модель составного спина	133
3.5	Фрустрированная лестница с примесями на границе	134
3.5.1	Относительные основные состояния	134
3.5.2	Правило упорядочения и основное состояние	137
3.5.3	Пример периодической цепочки со спином $1/2$ с нечетным числом спинов	139
3.6	Периодическая спиновая лестница	140
3.6.1	Учет матричных элементов от граничных взаимодействий . .	141
3.6.2	Относительные основные состояния	142
3.7	Спиновая лестница с четырехспиновым циклическим взаимодействием	144
3.7.1	Отрицательный базис	145
3.7.2	Четырехспиновые перестановки	145
3.7.3	Отрицательность недиагональных элементов	146
3.7.4	Связь с цепочкой Холдейна и самодуальный предел	148
4	Обобщенные модели Хаббарда с дополнительной симметрией	151
4.1	Упорядочение энергетических уровней для $SU(N)$ симметричных квантовых систем	151
4.1.1	Фермионная цепочка с $SU(N)$ симметрией.	153

4.1.2	Отрицательный базис	155
4.1.3	Относительные основные состояния	158
4.1.4	Упорядочение энергетических уровней	161
4.2	Основное состояние цепочки	164
4.3	Упорядочение энергетических уровней для квантово-механической системы с $SU(N)$ фермионами	166
4.4	Обобщенная модель Хаббарда с квантово-групповой симметрией . .	173
4.4.1	Инвариантные гамильтонианы на приводимых представлениях	176
4.4.2	Спиновые цепочки с дальними взаимодействиями	183
4.5	Фермионные представления	187
4.5.1	$t - J$ -модель при нулевом спин-спиновом взаимодействии и модель Хаббарда в пределе бесконечного отталкивания . . .	188
4.5.2	Расширенная модель Хаббарда с допингом, перескоком фер- мионных пар и взаимодействием дырок	189
4.5.3	Расширенная модель Хаббарда с взаимодействиями типа плотность- плотность и “бозон-бозон”	190
4.5.4	Сверхпроводящее основное состояние	194
4.6	Приложение	199
Заключение		201
Литература		204

Введение

В последние десятилетия достигнут значительный прогресс в исследовании низкоразмерных систем с взаимодействием между частицами. Объясняется это тем, что, во-первых, многие важные эффекты, которые широко исследуются в настоящее время и до сих пор не находят достаточно удовлетворительного объяснения в рамках более или менее завершённой теории, являются эффективно низкоразмерными. Например, квантовый эффект Холла и высокотемпературная сверхпроводимость являются в значительной степени двумерными явлениями. Во-вторых, одномерные, квази-одномерные и двумерные системы проще трёхмерных систем, поэтому они легче поддаются изучению как аналитическими, так и численными методами. В третьих, некоторые свойства систем в различных измерениях, такие как критическое поведение, могут иметь общие черты. В четвертых, в последнее время в результате технологического прогресса в области нанотехнологии, квантовых точек, оптических решёток стало возможным не только получение достаточно чистых одномерных и двумерных структур, таких как нанотрубки и графен, но и синтез кристаллических решёток из искусственных атомов с заранее заданной структурой. В частности, структуру кристаллической решётки можно задать таким образом, чтобы система обладала более высокой симметрией, чем обычная спиновая симметрия.

Известно, что уже задача трёх тел в трёхмерном пространстве с кулоновским взаимодействием не решается. Однако, в одномерии парное взаимодействие с по-

тенциалом, обратно пропорциональным квадрату расстояния, задает интегрируемую систему, которая известна как рациональная модель Калоджеро [32]. Она вместе с её различными обобщениями является одной из немногих многочастичных интегрируемых систем с взаимодействием, имеет множество приложений в современной физике и достаточно подробно изучена в литературе (см. обзоры [167, 160]). Были построены и изучены ее различные интегрируемые расширения, в частности, для тригонометрических и эллиптических потенциалов, для частиц со спином, для суперсимметричных систем, а также для всех алгебр Ли.

В континуальном или термодинамическом пределе, то есть в пределе большого числа частиц, модель Калоджеро переходит в теорию Янга-Миллса на цилиндре, а его суперконформное расширение описывает черную дыру вблизи горизонта. В этом пределе система имеет солитонные решения, отвечающие фундаментальным возбуждениям. Квантовая система Калоджеро описывает свободные частицы с дробной статистикой, тип которого определяется силой взаимодействия [164]. Кроме того, вариационное основное состояние дробного квантового эффекта Холла, известное как состояние Лафлина [119], можно рассматривать как некоторую деформацию основного состояния модели Калоджеро [17]. Тригонометрический аналог модели связан с интегрируемой цепочкой со спином $1/2$ с дальним взаимодействием, которая обладает основным состоянием с резонирующими валентными связями [91]. Модель Калоджеро и его модификации возникают в матричных моделях, W_∞ -алгебрах, квантовых группах, случайных матрицах и многих других областях физики и математики.

Известны различные способы её решения: метод Лакса, метод редукции матричной модели, сведение к системе свободных частиц с использованием конформной симметрии. Более того, N -частичная система модель является максимально суперинтегрируемой, т. е. обладает $2N - 1$ независимыми интегралами движения, среди которых имеется N коммутирующих интегралов Лиувилля. Эти интегралы

построены и исследованы в литературе [208, 115]. Каждый из интегралов Лиувилля определяет в свою очередь отдельную динамическую систему, которая тоже является максимально суперинтегрируемой. Следует отметить, что конформная симметрия, которая задаётся группой $SL(2, R)$, и является на самом деле симметрией действия, а не гамильтониана, который является одним из трёх генераторов группы. Тем не менее, благодаря этой симметрии, в системе возникает дополнительный интеграл движения: элемент Казимира конформной алгебры, который квадратичен по импульсам и соответствует угловой части гамильтониана, если формально представить модель Калоджеро как движение N -мерной частицы в поле со сложным потенциалом.

Следует отметить, что рациональная модель Калоджеро является частным (интегрируемым) случаем конформной механики – более общего класса систем обладающих конформной $SL(2, R)$ симметрией. В конформной механике, как и в модели Калоджеро, радиальные и угловые переменные разделяются. Вся информация о конформной механике закодирована в её сферической части, которую можно рассматривать как отдельную систему, которую мы называем сферической механикой. Эта система сама по себе представляет интерес, так как описывает многоцентровое обобщение $(N - 1)$ -мерного осциллятора Хиггса [97]. Очевидно, сферическая механика, построенная на базе рациональной модели Калоджеро, является интегрируемой системой. Однако, построение её интегралов движения, изучение их алгебры и их связи с интегралами движениями базовой системы является нетривиальной задачей.

В данной работе подробно исследуются интегралы движения сферической механики, построенной на базе рациональной модели Калоджеро и конформной механики в целом.

Одной из основных проблем физики конденсированных сред является изучение свойств сильно коррелированных материалов, где каждый атом содержит лока-

лизованные орбитали с сильным кулоновским и обменным взаимодействием. Соответствующие модели описывают системы взаимодействующих частиц, локализованных в узлах кристаллической решётки в приближении сильной связи. Простейшей системой сильно коррелированных электронов является модель Хаббарда, которая описывает переход между проводящим и диэлектрическим состояниями. Она является решёточной фермионной моделью с перескоками электронов, находящихся на s -орбиталях, на соседние узлы, которые моделируют туннелирование, и взаимным кулоновским отталкиванием двух электронов, находящихся в одном узле. В настоящее время предложены и исследованы также различные обобщения модели Хаббарда для многозонных электронных систем в присутствии дополнительных взаимодействий, при ограничениях на перескоки электронов, при наличии дополнительных симметрий и т. д.

После открытия высокотемпературной сверхпроводимости выяснилось, что обычная теория БКШ, основанная на приближении среднего поля, неприменима для её объяснения. В работе [12] Андерсон предложил исследовать высокотемпературную сверхпроводимость в рамках модели сильно коррелированных электронов. Большинство из многочисленных исследований в данном направлении, появившихся впоследствии, использовали приближённые или численные методы. Известно всего лишь несколько точных результатов. Один из них получен в рамках алгебраического подхода и основан на свойствах так называемых электронных η -пар [216], которые образуют состояния, обладающие так называемым внедиагональным дальним порядком (off-diagonal long-range order, ODLRO) [215]. Данное свойство предполагает также эффект Мейснера и квантование потока, которые сопутствуют сверхпроводимости. Сверхпроводимость обеспечивается мобильностью так называемых η -пар, которые аналогичны куперовским парам в стандартной теории [215, 216]. Однако основное состояние обычной модели Хаббарда не обладает таким свойством, поэтому стали рассматриваться её различные расширения

[42, 43].

В пределе сильного кулоновского взаимодействия и при половинном заполнении, когда на один узел приходится по одному свободному электрону, электроны фиксируются в разных узлах, и модель Хаббарда переходит в магнетик Гайзенберга спина $1/2$. Последний представляет собой систему спинов в узлах решетки с обменным взаимодействием между соседними спинами. Модель Гайзенберга, в свою очередь, является простейшей системой взаимодействующих квантовых спинов. Как и для модели Хаббарда, рассматриваются также её различные расширения, например, при наличии спиновых обменов более высокого порядка. Следует отметить, что из огромного количества известных взаимодействующих спиновых и фермионных квантовых систем на решетках лишь некоторые можно решить точно, вычислив спектр или свободную энергию в термодинамическом пределе. В основном – это одномерные системы, для которых работает метод обратной задачи рассеяния, приводящий к уравнениям Бете, среди которых: одномерная модель Хаббарда, цепочка Гайзенберга со спином $1/2$ [23], её обобщение для более высоких спинов [18] и симметрий более высокого ранга – цепочка Сазерленда [194], одномерная модель Хаббарда.

Однако, некоторые важные свойства системы носят более универсальный характер, чем интегрируемость: они остаются неизменными при изменении параметров системы, или даже для достаточно широкого класса систем. К таким свойствам относятся критическое поведение (гипотеза универсальности), наличие или отсутствие щели (массивный или безмассовый спектр) между основным состоянием и элементарными возбуждениями, наличие и степень вырождения уровней энергии, квантовые числа основного состояния, упорядочение минимальных уровней энергии по значению спина, и т. д. Часто для выявления таких общих свойств условие интегрируемости не требуется, так как существуют другие точные методы. Ярким примером является теорема Либ-Шульца-Маттиса об отсутствии щели в

термодинамическом пределе в спектре решеточных моделей, в которых значение спина, приходящее на минимальную ячейку, является полуцелым числом [128]. Другим примером является теорема Либ-Маттиса об антиферромагнитном упорядочении энергетических уровней для широкого класса так называемых двух-подрешеточных спиновых систем, которое также верно для некоторых моделей Хаббарда [125]. Хотя при квантовании основное состояние, благодаря квантовым флуктуациям, приобретает гораздо более сложный вид и не подлежит точному аналитическому расчёту, Либ и Маттис доказали, что его спин и вырождение не меняются. Более того, минимальные уровни энергии в секторах с определённым значением спина также невырождены (не считая вырождения по проекции спина в мультиплете) монотонно растут с ростом спина. В двухподрешеточных спиновых системах основное состояние в классическом пределе является антиферромагнитным, т. е. соседние спины антипараллельны, как для модели Гайзенберга на квадратной решётке, а сама решётка таким образом делится на две части подобно белым и чёрным полям шахматной доски, каждая из которых состоит из узлов с параллельными спинами. Это свойство отличает двухподрешеточные спиновые системы от фрустрированных, примером которых является антиферромагнетик Гайзенберга на треугольной решетке.

В настоящее время фрустрированные спиновые системы являются предметом интенсивных исследований [45]. Интерес к ним возник в результате прогресса в синтезе соответствующих магнитных материалов [116], а также оптических решёток и их применении в квантовых вычислениях [191]. В этих моделях, благодаря конкурирующим взаимодействиям между соседними спинами, основное состояние классической антиферромагнитной системы невозможно построить, минимизируя по-отдельности локальные взаимодействия. Поэтому, оно имеет гораздо более сложный вид, чем простейшее антиферромагнитное состояние Нила и, как правило, имеет большую степень вырождения [27]. Фрустрирование может иметь

геометрический характер. В этом случае оно возникает в результате конкуренции между различными антиферромагнитными взаимодействиями. Оно может быть обусловлено также наличием как ферро- так и антиферромагнитных взаимодействий, которые также конкурируют между собой.

Теорема Либа-Маттиса была обобщена на различные спиновые и фермионные системы на решетке: цепочку Гайзенберга со спином 1 с биквадратичным взаимодействием, расширенную цепочку Хаббарда [214], двухподрешеточную модель Хаббарда при половинном заполнении [182]. Ферромагнитное упорядочение уровней энергии, которое обратное антиферромагнитному, было также сформулировано и доказано для цепочки Гайзенберга спина $1/2$ [153]. Следует отметить, что за последнее время спиновые и фермионные системы с расширенной симметрией интенсивно изучаются в литературе [67, 168, 5]. Этот интерес обусловлен их применением в системах холодных атомов [101, 65]. Интересную классификацию низкоэнергетического поведения $SU(N)$ симметричных спиновых цепочек, состоящее из трёх различных фаз, которая обобщает различное поведение целых и полуцелых спиновых цепочек [89], было предложено и проверено в работах [67, 168].

Значительная активность наблюдается и в области изучения квази-одномерных спиновых систем, таких как модель спиновой лестницы, которая представляет собой полосу, вырезанную из квадратной спиновой решётки, и её различные обобщения. В течение последних лет также было получено много соединений такого типа, имеющих структуру, аналогичную структуре двумерных высокотемпературных сверхпроводников [39]. Они проще для изучения, чем их более сложные двумерные аналоги. Среди них выделяется семейство $Sr_{n-1}Cu_{n+1}O_{2n}$, состоящее из слабо-связанных спиновых лестниц, которые получаются из слоев исходного соединения $SrCuO_2$. Было высказано предположение, что механизмы, аналогичные существующим, в слоях CuO_2 высокотемпературных сверхпроводников также

могут приводить к сверхпроводящему поведению [40]. Развернулись интенсивные теоретические и экспериментальные исследования этих систем. Было установлено, что легированное соединение спин-лестничной системы $Sr_{14-x}Ca_xCu_{24}O_{41}$ под высоким давлением является сверхпроводящим вплоть до температур $10K$. Преимущество лестничных систем состоит в том, что они допускают изучение методами характерными для исследования одномерных систем, тогда как для двумерных высокотемпературных сверхпроводников такие методы неприменимы.

С теоретической точки зрения квази-одномерные системы интересны тем, что они осуществляют переход от одномерной модели Гайзенберга к двумерной на квадратной решётке. При нулевой температуре квантовые флуктуации нарушают дальний антиферромагнитный порядок в одномерии, который предположительно существует и в двумерии. Спектр же возбуждений является безмассовым (отсутствует щель между основным состоянием и элементарными возбуждениями), а парные спиновые корреляции убывают в зависимости от расстояния по степенному закону. Тем не менее, переход от одномерной решётки к квадратной посредством спиновых лестниц при увеличении количества связанных цепей не является гладким. В то время как низкоэнергетические свойства лестницы с нечётным числом цепей аналогичны свойствам одной цепочки (непрерывные возбуждения и степенной спад спиновых корреляций), лестницы с чётным числом цепей характеризуются конечной энергетической щелью и экспоненциальным затуханием корреляций. Эти замечательные свойства квантовых спиновых лестниц аналогичны свойствам цепочек Гайзенберга, соответственно, с нечётными и чётными значениями спина, которые установил Холдейн [90]. Таким образом, возникает естественный вопрос: как лестничные фазы связаны с фазами спиновой цепочки? Оказалось, что существует непрерывный путь от фазы Холдейна (цепочка Гайзенберга спина 1) к фазе лестницы со спином $1/2$, не содержащий критических точек [205]. Этот путь проходит вдоль одной из диагоналей лестницы и нарушает Z_2 симметрию относи-

тельно продольной оси обеих моделей. Поэтому интерес для изучения представляет наиболее общая модель фрустрированной спиновой лестницы с различными значениями диагональных взаимодействий, которая содержит все предыдущие исследования в качестве частных случаев.

Следует отметить, что фазовые переходы сильно коррелированных квантовых систем при нулевой температуре, являясь переходами между различными основными состояниями системы, характеризуются не температурными, а квантовыми флуктуациями. Исследование последних лет показали, что, во-первых, квантовые фазовые переходы выходят за пределы теории фазовых переходов Ландау, согласно которой фазовые состояния вещества описываются количеством заложенных в них симметрий, а переходы между ними определяются нарушением (уменьшением или увеличением) симметрии при переходе от одной фазы к другой. Состояния квантовых систем нужно описывать не с помощью классической теории симметрий Ландау, а посредством нового, так называемого топологического порядка. Квантовые фазы гораздо богаче классических, они обладают рядом экзотических свойств [37]. Оказалось, что эти фазы характеризуются проективными представлениями группы симметрии системы. Заданной симметрии может соответствовать множество различных квантовых фаз, поэтому фазовые состояния описываются уже не классическими видами симметрии, а посредством запутанных состояний, являющихся суперпозицией чистых.

В данной работе теорема Либа-Маттиса об антиферромагнитном упорядочении уровней энергии обобщается для модели спиновой лестницы с дополнительными диагональными и четырехспиновым циклическим взаимодействием. Она также обобщается для обобщённой цепочки Хаббарда, обладающей $SU(N)$ симметрией, с наиболее общим потенциалом и дополнительными взаимодействиями, описывающими парные перескоки соседних электронов и обменное взаимодействие соседних $SU(N)$ спинов. Определены и исследованы также интегрируемые рас-

ширения обычной модели Хаббарда с дополнительными симметриями.

Для исследования квантовых спиновых систем применяются также приближённые аналитические (континуальное приближение, приводящее к теории поля, метод среднего поля, спиновые волны) и численные методы, такие как метод Монте-Карло и точная диагонализация. Последний основан на численной диагонализации гамильтониана малых систем с последующей экстраполяцией на большие системы. Из-за экспоненциального роста числа состояний квантовой системы с ростом её размеров данный метод часто даёт неудовлетворительные результаты. Недавно Уайтом был предложен численный ренормгрупповой метод для матрицы плотности (density matrix renormalization method, DMRG), который развивает метод численной ренормгруппы, разработанный Вильсоном для решения проблемы Кондо. Для одномерных квантовых систем позволяет достаточно точно вычислять энергии основного состояния и нескольких элементарных возбуждений для относительно большого числа спинов [203] и в настоящее время широко применяется для исследования фазовых диаграмм и фазовых переходов. Следует отметить, что обобщения метода DMRG для двумерных решёток, а также для конечных температур не приводят к достаточно точным результатам.

В данной работе подробно исследована трехмерная фазовая диаграмма фрустрированной лестницы со спином $1/2$ с диагональными взаимодействиями при нулевой температуре с применением численных и аналитических расчётов.

Ниже коротко перечисляются **цели** и **задачи** данной работы.

1. Исследование сферической части рациональной модели Калоджеро и конформной механики в целом как отдельной системы и ее интегралов движения.
2. Исследование фазовой диаграммы спиновой системы на лестничной решётке с диагональными взаимодействиями.

3. Обобщение антиферромагнитного упорядочения уровней энергии для фрустрированных спиновых систем на лестничной решётке.
4. Обобщение антиферромагнитного упорядочения уровней энергии для одномерных квантовых систем с $SU(N)$ симметрией.
5. Исследование обобщённых интегрируемых цепочек Хаббарда с расширенной симметрией.

Краткое содержание работы

В главе 1 исследуются интегралы движения сферической части рациональной модели Калоджеро. Сферическая система Калоджеро рассматривается как отдельная интегрируемая система, описывающая взаимодействующие частицы на сфере, что можно рассматривать как многомерное обобщение известного осциллятора Хиггса. Хотя эволюция данной системы очевидным образом выводится из траекторий движения базовой системы Калоджеро, нахождение ее интегралов движения и их связь с интегралами движения системы Калоджеро является далеко нетривиальной задачей. В данной главе сферическая система и набор ее интегралов движения получается редукцией из соответствующей матричной модели по группе $SL(2, R) \times SU(N)$. Сферические инварианты представлены в виде диаграмм, которые напоминают схематическое представление для синглетных состояний, образованных валентными связями из обычных квантовых спинов $1/2$. Показано также, что Гамильтониан сферической части переводит интегралы Лиувилля модели Калоджеро в дополнительные интегралы, которые обеспечивают суперинтегрируемость.

В первой части этой главы исследуется сферический сектор рациональной системы Калоджеро и её интегралы движения, при помощи редукции последней из матричной модели. В §1.2 определяется сферическая система. Сначала приводится

вывод Лиувиллевских интегралов исходной модели Калоджеро с использованием редукции эрмитовой матричной модели. Интегралы являются $U(N)$ инвариантами многочленами ($SU(N)$ инвариантами, если исключен центр масс) и соответствуют старшим состояниям конформной алгебры. Затем показывается, что интегралы движения сферической системы описываются $SU(N) \times SL(2, R)$ синглетами. Это позволяет строить инварианты сферической механики исходя из $SU(N)$ инвариантных тензоров. Для упрощения расчётов разработана диаграммная техника построения инвариантов. Приводятся явные выражения для всех функционально независимых интегралов движения вплоть до шестого порядка по импульсам. В конце устанавливается связь развитой диаграммной техники с базисными состояниями из валентных связей, введённых Темперли и Либом [197].

Сложнее обстоит дело с более общей конформной механикой. Допустим, что система обладает некоторым дополнительным интегралом движения, при этом её интегрируемость изначально не предполагается. Возникает вопрос: будет ли полученная из него сферическая механика тоже обладать соответствующим интегралом, если да, и то как его построить? Во второй части данной главы эта проблема подробно исследуется. Симметрии конформной механики приводятся к системе дифференциальных уравнений на сферическом фазовом пространстве. Анализ упрощается за счёт использования свойств представлений группы вращений. Затем рассматривается интеграл движения конформной механики произвольной конформной размерности и из неё строятся возможные интегралы движения соответствующей сферической системы. В конце этот метод применяется к сферической части четырёхчастичной модели Калоджеро, для которой строится полный набор функционально независимых интегралов движения. Они сравниваются с интегралами, полученными в первой части диаграмматическим методом.

В главе 2 построена трехмерная фазовая диаграмма модели фрустрированной спиновой лестницы с диагональными взаимодействиями при нулевой температу-

ре. Эта модель содержит как частные случаи цепочку Гайзенберга со спином 1, димеризованную цепочку и цепочку с взаимодействием между следующими соседями, зигзагообразную лестничную модель, а также другие ранее исследованные модели. В основном, применяются численные методы точной диагонализации и ренормализационной группы матрицы плотности (density matrix renormalization group: DMRG). Установлено, что все антиферромагнитные основные состояния с ненулевой щелью принадлежат классу универсальности, соответствующей фазе Холдейна, т. е. цепочки Гайзенберга со спином 1. В трехмерной фазовой диаграмме определена двумерная поверхность перехода между двумя топологически различными фазами Холдейна, каждый из которых задается своим так называемым струнным топологическим параметром порядка. В некоторых областях поверхности, соответствующих фазовому переходу второго рода, щель и струнный параметр порядка заходятся. В остальной области наблюдается переход первого порядка с конечной щелью.

В фазовой диаграмме выявлены три большие трёхмерные области: ферромагнитная область и две антиферромагнитные области, которые соответствуют фазе продольных димеров и фазе Холдейна. Две антиферромагнитные фазы принадлежат одному классу универсальности и отличаются лишь топологически. Детально исследованы двумерные поверхности перехода между этими тремя фазами.

Во введении к данной главе выбирается удобная параметризация трёхмерного фазового пространства модели в виде восьмигранника. В §2.2 идентифицируются две топологически различные антиферромагнитные фазы с помощью соответствующих струнных параметров порядка, определённых в работе [112]. В §2.3 детально описывается метод, который используется для определения поверхности фазового перехода: алгоритм DMRG с подходящими открытыми граничными условиями, что позволяет с достаточно хорошей точностью вычислять поверхность перехода. Приводится алгоритм данного метода. §2.4 посвящён исследованию зигзагооб-

разной модели, которая соответствует двумерному сечению фазовой диаграммы. Расчёты в основном проводились на суперкомпьютере Cray T3E с использованием пакета MPI для параллельных вычислений.

Данная глава основана на работах [76, 75].

В главе 3 сформулировано и доказано обобщение Теоремы Либа-Матиса для модели спиновой лестницы спина $1/2$, с дополнительными диагональными и циклическим четырёхспиновым обменными взаимодействиями. Точнее, в определённой области параметров минимальные уровни энергии растут с ростом спина (антиферромагнитный порядок) в симметричном и антисимметричном секторах по отдельности. Эти сектора образуют, соответственно, волновые функции, симметричные и антисимметричные относительно продольной оси симметрии лестничной решётки, на котором задана данная модель.

В §3.1 рассматриваются свойства двухподрешеточных и фрустрированных антиферромагнитных спиновых систем. В двухподрешеточных системах, в классическом случае, все локальные спиновые взаимодействия невозможно минимизировать одновременно, что приводит к антигерромагнитному порядку. Данное свойство не выполняется для фрустрированных систем. Далее приводится известная теорема Либа-Маттиса для двухподрешеточных систем: минимальные уровни энергии в секторах с определенным значением спина невырождены и монотонно растут с ростом спина.

В §3.2 доказывается обобщение данного утверждения для модели спиновой лестницы с диагональными взаимодействиями. Благодаря спиновой симметрии и инвариантности гамильтониана по отношению к продольной оси лестницы, уровни энергии характеризуются спином S , проекцией спина S^z и четностью $\sigma = \pm 1$. С помощью симметризованных и антисимметризованных спиновых операторов строится базис, в котором гамильтониан представляется в виде матрицы с отрицательными или нулевыми недиагональными элементами. Более того, в секторе

с фиксированными значениями (S^z, σ) эта матрица является связной, и как следствие, её (относительное) основное состояние невырождено и представляется в виде положительной суперпозиции всех базисных состояний. Используя это свойство, находится значение спина относительного основного состояния: $S = |S^z|$. Исключением является сектор с $S^z = 0$ и $\sigma = (-1)^{N-1}$, где $S = 1$. Далее, используя единственность относительного основного состояния и свойства спиновых мультиплетов, доказывается, что минимальные уровни энергии в отдельных секторах (S, σ) невырождены (т. е. соответствуют единственному мультиплету спина S) растут с ростом спина при фиксированной четности.

В §3.3 изучаются спин и четность, а также степень вырождения основного состояния, а также обсуждается термодинамический предел. Согласно результатам предыдущей раздела, основное состояние является либо невырожденным синглетом с четностью $\sigma = (-1)^N$, либо невырожденным триплетом с четностью $\sigma = (-1)^{N-1}$, либо их вырожденной суперпозицией. Показано, что при условии $J_t^\perp > |J_{t-1}^\times| + |J_t^\times|$, $J_t^\parallel > |J_t^\times|$ на значения параметров гамильтониана имеет место только первый случай. Однако, в общем случае все три сценария могут иметь место, как показывают результаты по численной диагонализации гамильтониана с нечетным числом ступеней при различных значениях констант связи. При этом третий случай синглет-триплетного вырождения соответствует критической точке перехода между двумя топологически различными фазами Холдейна в термодинамическом пределе.

В §3.4 сравниваются свойства гамильтониана обобщённой спиновой лестницы, установленные в предыдущих разделах, с аналогичными свойствами, полученными ранее для ферромагнитных взаимодействий вдоль ступеней, вдоль диагоналей и равных продольных и диагональных взаимодействий. Первые две системы являются двухподрешеточными, а третья сохраняет суммарный спин каждой ступени. Получено полное соответствие.

В §3.5 рассматривается спиновая лестница с граничной примесью со спином s_0 . Все рассуждения аналогичны рассуждениям в §3.2 и §3.3. Результат: наименьшие уровни энергии в секторах с фиксированными значениями спина S и четности σ упорядочены в соответствии с правилом $E_{S_1, \sigma} > E_{S_2, \sigma}$: в секторе $\sigma = (-1)^N$ при $S_1 > S_2 \geq s_0$ или $S_1 < S_2 = s_0$, а в секторе $\sigma = (-1)^{N-1}$ при $S_1 > S_2 \geq s_0 - 1$ или $S_1 < S_2 = s_0 - 1$. Основное состояние модели в $\sigma = (-1)^N$ секторе образует $S = s_0$ мультиплет, а в $\sigma = (-1)^{N-1}$ секторе — $S = |s_0 - 1|$ мультиплет. В обоих случаях мультиплет является невырожденным. В заключение рассматривается частный случай периодической цепочки спина $1/2$ с нечётным числом спинов, который точно решается, и для которого уровни двукратно вырождены по четности: $E_{S,+} = E_{S,-}$.

В §3.6 рассматривается та же система с периодическими граничными условиями. Результаты, аналогичные результатам §3.2, получены лишь в секторе с четностью $\sigma = (-1)^N$. В отличие от системы со свободными граничными условиями здесь остаётся открытым вопрос о вырождении и спине основного состояния. Причиной является отсутствие точных результатов для сектора $\sigma = (-1)^{N-1}$.

Наконец, в §3.7 аналогичные результаты получены для спиновой лестницы с циклическим обменным взаимодействием четырёх спинов. Используя разложение оператора циклического обмена на операторы парных перестановок четырёх спинов, построен отрицательный базис. Все результаты §§3.2,3.3 верны также для данной системы при условии $J_t^{\parallel} > 2J^{\square} > 0$ на параметры, где через $J^{\square}$ обозначена константа четырехспинового обмена. Отдельно рассматривается предел $J_t^{\parallel} = 2J^{\square}$, когда группа симметрии $SU(2) \times Z_2$ расширяется до $SU(2) \times U(1)$.

Данная глава основана на работах [83, 84, 73, 74].

В главе 4 изучаются обобщённые одномерные модели Хаббарда с расширенной симметрией.

В §4.1 сформулировано и доказано обобщение Теоремы Либ-Матиса для обоб-

щённой цепочки Хаббарда с унитарной $U(N)$ симметрией. Фермионы характеризуются N различными ароматами α , которые являются обобщениями обычного спина, а унитарная симметрия обеспечивает равноправие ароматов. Дополнительные члены в гамильтониане описывают одновременные перескоки пар электронов между соседними узлами, обменным взаимодействием соседних обобщённых спинов, а также наиболее общий потенциал взаимодействия частиц в узле. Мультиплеты $U(N)$ симметрии нумеруются диаграммами Юнга с числом элементов, равным числу узлов цепочки, и числом строк, не превосходящим ранга симметрии N . Благодаря этой симметрии, уровни энергии характеризуются диаграммой Юнга $\mathbb{Y}$ и числами n_α , задающими количество фермионов данного типа, причём по последним имеется вырождение в заданном мультиплете.

Сначала, используя свойства фермионных операторов, строится базис, в котором недиагональные элементы гамильтониана неположительны. Далее, устанавливается, что в секторе с фиксированными значениями M_α эта матрица связна, и как следствие, её относительное основное состояние там невырождено и представляется в виде положительной суперпозиции всех базисных состояний. Сравнением с простым пробным состоянием находится мультиплет, которому принадлежит относительное основное состояние: он характеризуется схемой Юнга со строками длины M_α . Далее, используя единственность относительного основного состояния и теория представлений унитарной группы, доказывается, что минимальные уровни энергии в отдельных секторах $\mathbb{Y}$ невырождены с точностью до мультиплета и упорядочены в соответствие с доминантным порядком среди диаграмм Юнга, а именно: $\mathbb{Y}_1 \succ \mathbb{Y}_2$, если $\mathbb{Y}_2$ может быть получена из $\mathbb{Y}_1$ смещением некоторых ее квадратов с верхних строк в нижние.

§4.2 посвящён основному состоянию данной системы. Доминантный порядок является частичным: не все диаграммы Юнга можно сравнивать друг с другом. Однако, существует наинизшая диаграмма $\mathbb{Y}_{\text{gs}}$, все столбцы которой, кроме по-

следнего, имеют максимально-возможную длину N . Таким, образом, Основное состояние расширенной цепочки Хаббарда с M частицами образует невырожденный антисимметричный мультиплет порядка $m = M \bmod N$ и размерностью $d = \binom{N}{m}$. В частности, если число частиц кратно N , основное состояние является невырожденным синглетом.

В §4.3 устанавливается антиферромагнитное упорядочение энергетических уровней для квантово-механической квантово-механической системы одномерных идентичных фермионов с $SU(N)$ внутренними степенями свободы и взаимодействием, зависящим только от пространственных координат. Данный результат является обобщением аналогичного правила для случая $SU(2)$ симметрии, установленной Либом и Маттисом в работе [127] (см. также [142]). Симметрия гамильтониана задается группой $\mathcal{S}_M^{\text{space}} \times \mathcal{S}_M^{\text{spin}} \times SU(N)$, состоящей из перестановок пространственных и спиновых степеней свободы, а также унитарного вращения спиновых переменных. Соответственно, уровни энергии нумеруются двумя диаграммами Юнга: одной для пространственных координат, и другой – для спиновых, так как согласно дуальности Шура-Вейля, унитарная группа и группа перестановок, действующие на спиновые индексы, описываются одной схемой Юнга. Условие антисимметричности полной волновой функции, согласно теории представлений симметрической группы, приводит к взаимной сопряжённости этих диаграмм. Имеется вырождение по спинам, поэтому уровни энергии определяются типом симметрии при перестановке координат. Согласно же обобщению осцилляторной теоремы для многих частиц, минимальные уровни энергии для волновых функций с определённой симметрией при перестановке координат упорядочены согласно обратному доминантному порядку соответствующих диаграмм Юнга [127, 142]. Поскольку операция сопряжения диаграмм обращает доминантный порядок, то для спиновых мультиплетов имеем доминантный порядок уровней энергии, как и для обобщённой модели Хаббарда.

В §4.4 строятся квантовые цепочки, в которых, в отличие от обычных моделей, состояния на каждом узле решётки образуют не один [163], а сразу несколько неприводимых мультиплетов квантовой группы. Гамильтониан при этом строится из локальных сплетающих операторов между приводимыми представлениями, причём его ограничение на состояния с максимальными значениями спиновых проекций (старшие состояния) соответствует более простому базовому гамильтониану, интегрируемость которого известна заранее. Следовательно, уровни энергии исходного гамильтониана совпадают с уровнями энергии базовой системы, но с дополнительным вырождением, которое соответствует степеням свободы, связанным с мультиплетами квантовой группы. В общем случае дополнительное вырождение зависит от уровня энергии, что приводит к нетривиальному интегрируемому обобщению базового гамильтониана. Далее рассматриваются конкретные случаи, когда базовый гамильтониан соответствует модели Гайзенберга, или цепочке Холдейна-Шастри [91, 180] с дальними взаимодействиями спинов. Следует отметить, что указанная конструкция является обобщением метода, применённого в работе [7] для исследования расширенной модели Хаббарда в пределе сильного отталкивания.

В §4.5 рассматриваются представления гамильтонианов, построенных в предыдущем разделе, через фермионные операторы, в простейших случаях, когда пространство состояний каждого узла трехмерно или четырехмерно. Построенные таким образом фермионные гамильтонианы приводят к ранее известным и новым интегрируемым расширениям модели Хаббарда. Эти модели, кроме обычных членов, отвечающих за перескоки электронов и взаимодействие Хаббарда, содержат также взаимодействия связанных зарядов, перескоки пар электронов, кулоновское и обменное спиновое взаимодействия соседей. В случае, когда базовая модель задается неоднородной цепочкой Гайзенберга, одна из построенных расширений модели Хаббарда обладает сверхпроводящим основным состоянием. Сверхпроводя-

мость обеспечивается мобильностью так называемых η -пар, которые в отличие от куперовских, задаются не в импульсном, а координатном пространстве [215, 216].

Результаты диссертационной работы **опубликованы** в статьях [77, 82, 81, 80, 74, 85, 88, 86, 87, 84, 83, 72, 71, 76, 79, 10, 9, 14, 15, 78, 82, 75].

Глава 1

Интегралы движения сферической механики

1.1 Угловая часть рациональной модели Калоджеро

Модель Калоджеро является одной из наиболее известных многочастичных интегрируемых систем. Она описывает систему из N частиц взаимодействующих между собой с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния, и задаётся гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \sum_{i < j} \frac{g^2}{(q_i - q_j)^2}. \quad (1.1)$$

Эта система была введена четыре десятилетия назад [32, 31] и по-прежнему привлекает большой интерес из-за своей богатой внутренней структуры и благодаря многочисленным приложениям. Были построены и изучены её различные интегрируемые расширения, в частности, для тригонометрических [192, 193] и эллиптических потенциалов, для частиц со спином [62, 210], для суперсимметричных систем [58, 54], а также для всех алгебр Ли [211, 33, 159] и корневых систем Кокстера.

В континуальном или термодинамическом пределе, то есть в пределе большого

числа частиц, модель Калоджеро переходит в теорию Янга-Миллса [66, 144] на цилиндре, а его суперконформное расширение описывает чёрную дыру вблизи горизонта [61]. В этом пределе система имеет солитонные решения, отвечающие фундаментальным возбуждениям [165].

Квантовая система Калоджеро описывает свободные частицы с дробной статистикой, тип которого определяется силой взаимодействия [164, 166]. Кроме того, вариационное основное состояние дробного квантового эффекта Холла, известное как состояние Лафлина [119], можно рассматривать как некоторую деформацию основного состояния модели Калоджеро [17]. Тригонометрический аналог модели [192, 193] связан с интегрируемой цепочкой спина $1/2$ с дальним взаимодействием, которая обладает основным состоянием с резонирующими валентными связями [91, 180, 92]. Также установлена её связь с уравнением Бенджамина-Оно, возникающим в гидродинамике [1]. Модель Калоджеро и её модификации возникают в матричных моделях [106, 166], W_∞ -алгебрах [99], квантовых группах [22], случайных матрицах [48] и многих других областях физики и математики.

Интегрируемость модели Калоджеро установил Мозер [149], который построил N независимых интегралов движения, находящиеся в инволюции, как и полагается по определению интегрируемости по Лиувиллю. Их построение основано на методе Лакса, который также называется методом $L - A$ пары. Лиувиллевские интегралы можно получить и другим способом. Дело в том, что система Калоджеро получается $SU(N)$ редукцией из свободной матричной модели размера $N \times N$, при этом преобразом интегралов Лиувилля являются $SU(N)$ инвариантные полиномы от матричных импульсов.

Важным свойством всех рациональных моделей Калоджеро является динамическая конформная симметрия $SU(1, 1) \equiv SO(1, 2) \equiv SL(2, R)$, генераторами которой является гамильтониан H (1.1), дилатация $D = \sum_i p_i q_i$ и конформный буст

$$K = \sum_i q_i^2/2:$$

$$\{H, D\} = 2H, \quad \{K, D\} = -2K, \quad \{H, K\} = D. \quad (1.2)$$

Следует отметить, что конформная инвариантность играет важную роль во многих областях квантовой теории поля и физики конденсированных сред: в теории струн, в теории критических явлений, в низкоразмерных решеточных интегрируемых спиновых и фермионных системах и т. д. В связи с этим, одномерные (механические) системы, обладающие конформной инвариантностью, также представляют значительный интерес. Кроме того, их можно рассматривать как простейшие модели в теории конденсированных сред.

Необходимо также отметить, что конформная группа в конформных механических системах является не точной симметрией, так как она не коммутирует с гамильтонианом, а симметрией действия (симметрией в теоретико-полевым смысле). Тем не менее, благодаря ей, в системе возникает дополнительный интеграл движения: угловая часть гамильтониана, которая соответствует оператору Казимира конформной алгебры (1.2):

$$\mathcal{I} = 4KH - D^2. \quad (1.3)$$

Радиальная и сферическая части рациональной системы (1.1) разделяются следующим способом:

$$D = p_r r, \quad K = \frac{r^2}{2}, \quad H = \frac{p_r^2}{2} + \frac{\mathcal{I}(u)}{2r^2}, \quad (1.4)$$

где радиальные (r, p_r) и сферические (u^α) координаты по-отдельности удовлетворяют следующим скобкам Пуассона:

$$\{p_r, r\} = 1, \quad \{u^\alpha, p_r\} = \{u^\alpha, r\} = 0, \quad \{u^\alpha, u^\beta\} = (\omega^{-1})^{\alpha\beta}(u).$$

Наиболее общая система, определяемая гамильтонианом H вида (1.4), обладает конформной симметрией (1.2) и называется конформной механикой. Таким

образом, модель Калоджеро является примером интегрируемой конформной механики. Вся информация о конформной механике закодирована в сферической части её гамильтониана:

$$\mathcal{I}(u), \quad \{u^\alpha, u^\beta\} = \omega^{\alpha\beta}(u). \quad (1.5)$$

Эта система интересна сама по себе, так как описывает многоцентровое обобщение $(N - 1)$ -мерного осциллятора Хиггса, как мы увидим ниже. В квантовом случае и для специальных дискретных значений константы связи система эквивалентна свободной частице на сфере [56]. Тем не менее, связь между интегралами движения изначальной конформной механики и её сферическим сектором очень сложна. В частности, остаётся неясным, как построить Лиувиллевские интегралы движения сферической механики.

С другой стороны, рациональная модель Калоджеро может быть легко построена исходя из свободной эрмитовой матричной модели с помощью гамильтоновой редукции [160, 161]. Отсюда естественно вытекают её интегрируемость и выражение для Лаксовской пары. Таким образом, вполне естественно использовать матричную модель для исследования сферического сектора модели Калоджеро и его интегралов движения.

В первой части этой главы исследуется сферический сектор рациональной системы Калоджеро и её интегралы движения, используя редукцию последней из матричной модели. Сначала приводится вывод Лиувиллевских интегралов исходной модели Калоджеро с использованием редукции эрмитовой матричной модели. Интегралы являются $U(N)$ инвариантными многочленами ($SU(N)$ инвариантными, если центр масс исключается) и соответствуют старшим состояниям конформной алгебры. Затем показывается, что интегралы движения сферической системы описываются $SU(N) \times SL(2, R)$ синглетами. Это позволяет строить инварианты сферической механики с помощью $SU(N)$ инвариантных тензоров. Для

упрощения расчётов приводится схематическое описание инвариантов. Приводятся явные выражения для всех функционально независимых интегралов движения вплоть до шестого порядка по импульсам. В конце устанавливается связь развитой диаграммной техники с базисными состояниями из валентных связей, введённых Темперли и Либом [197].

Сложнее обстоит дело с более общей конформной механикой. Допустим, что система обладает некоторым дополнительным интегралом движения, при этом её интегрируемость изначально не предполагается. Возникает вопрос: будет ли полученная из неё сферическая механика обладать соответствующим интегралом, если да, то как его построить? Во второй части данной главы мы подробно исследуем эту проблему. Мы описываем симметрии конформной механики при помощи системы дифференциальных уравнений на сферическом фазовом пространстве. Использование ряда свойств представлений группы $SO(3)$ значительно упрощает её анализ. Затем мы рассматриваем интеграл движения конформной механики произвольной конформной размерности и строим с его помощью возможные интегралы движения соответствующей сферической системы. В конце этот метод применяется к сферической части четырёхчастичной модели Калоджеро, для которой строится полный набор функционально независимых интегралов движения. Они сравниваются с интегралами, полученными в первой части диаграмматическим методом.

Данная глава основана на работах [77, 80, 88, 87, 86].

1.2 Угловая часть системы Калоджеро как обобщение осциллятора Хиггса

Сферическую механику (1.3), (1.4), соответствующую модели Калоджеро (1.1), можно интерпретировать как одночастичную систему на S^{N-1} (на S^{N-2} , если ис-

ключить центр масс), где через S^N обозначается N -мерная сфера. Запишем её гамильтониан в виде:

$$\mathcal{I}(p_{\varphi_\alpha}, \varphi_\alpha) = \frac{K_{\text{sph}}(p_{\varphi_\alpha}, \varphi_\alpha)}{2} + V_{\text{sph}}(\varphi_\alpha), \quad \{p_{\varphi_\alpha}, \varphi_\alpha\} = \delta_{\alpha\beta}, \quad (1.6)$$

где индексы α, β нумеруют сферические координаты, а K_{sph} – обычная кинетическая энергия на сфере, которая, конечно, квадратична по сферическим импульсам p_{φ_α} . Используя (1.128) и (1.126), представим сферический потенциал в виде:

$$V_{\text{sph}}(\varphi_\alpha) = \sum_{i < j} \frac{g^2}{2 \cos^2 \theta_{ij}} = \frac{N(N-1)g^2}{4} + \frac{g^2}{2} \sum_{i < j} \tan^2 \theta_{ij}, \quad (1.7)$$

где углы θ_{ij} при $i < j$ определяются условиями:

$$\cos \theta_{ij} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{ij} \cdot \mathbf{q}}{\sqrt{2}|\mathbf{q}|} = \frac{\boldsymbol{\alpha}_{ij} \cdot \mathbf{q}}{\sqrt{2}r}. \quad (1.8)$$

Здесь вектора $\boldsymbol{\alpha}_{ij}$ определяют корневую систему алгебры $su(N)$ и задаются выражением (1.124), а углы θ_{ij} образуют переполненную систему и выражаются через φ_α сложным образом. Вспомним теперь, что выражение

$$V_{\text{Higgs}} = \frac{\omega^2 r_0^2 \tan^2 \theta}{2}$$

определяет известный потенциал осциллятора Хиггса. Он обобщает обычный гармонический потенциал для сферы радиуса r_0 и наследует все его скрытые симметрии [97, 109, 154, 121].

Таким образом, мы получили интегрируемый $(N-1)$ -мерный аналог осциллятора Хиггса с частотой $\omega = g$, обладающий $\frac{N(N-1)}{2}$ центрами.

Исключением центра масс можно на единицу уменьшить размерность сферической механики. Для этого удобно перейти к координатам Якоби (1.122) (1.123). Тогда исходный гамильтониан (1.128) перейдет в редуцированный (1.129). Координаты Якоби удобны тем, что переход к ним осуществляется ортогональным преобразованием, который не меняет вид кинетической энергии, а компоненты Q_0, P_0

соответствуют центру масс, что позволяет легко редуцировать их. Углы θ_{ij} теперь определяются условиями

$$\cos \theta_{ij} = \frac{\beta_{ij} \cdot \mathbf{Q}}{\sqrt{2}|\mathbf{Q}|} = \frac{\beta_{ij} \cdot \mathbf{Q}}{\sqrt{2}r}, \quad (1.9)$$

где система векторов β_{ij} получается поворотом корневой системы с помощью преобразования Якоби и задаётся в (1.124). Получается интегрируемый $(N - 2)$ -мерный аналог осциллятора Хиггса.

Следует отметить, что осциллятор Хиггса был введён в рассмотрение около тридцати лет назад и с тех пор изучен во многих работах (см., например, [25] и ссылки в ней). Тем не менее, его анизотропная версия была найдена совсем недавно [155], в то время как двухцентровая версия, насколько нам известно, нигде не обсуждалась.

Остановимся на дискретных симметриях полученной сферической системы. Исходная модель Калоджеро обладает симметрией по отношению к перестановкам частиц, которая задаётся симметрической группой S_N . Она также инвариантна при отражении всех координат $q_i \rightarrow -q_i$, которое образует группу Z_2 . Таким образом, система (1.1) инвариантна по отношению к прямому произведению $S_N \times Z_2$. Той же дискретной симметрией должна обладать и соответствующая ей сферическая система (1.6), (1.7). В сферических координатах отражение задаётся преобразованием $\theta_{ij} \rightarrow \theta_{ij} + \pi$.

1.2.1 Трехчастичное Калоджеро и система Якоби на окружности

Простейшая нетривиальная система соответствует угловой части трехчастичной модели, которая рассматривалась в пионерской работе Калоджеро [31]. На самом деле, эта система была рассмотрена в середине XIX Якоби [105] (см. также [160]). Для $N = 3$ имеем корневую систему $su(3)$, задаваемую тремя положительными

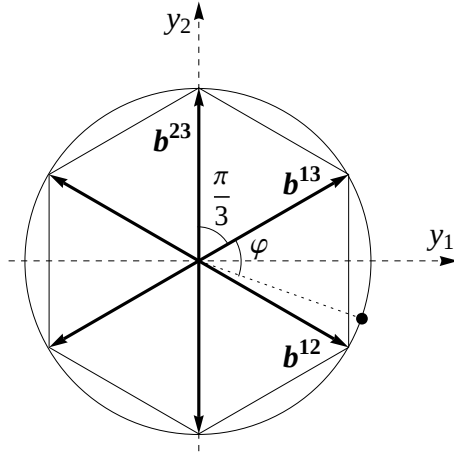


Рис. 1.1: Центры сил, соответствующие корневой системе $su(3)$ и образующие правильный шестиугольник. Угол φ задаёт положение частицы на окружности.

$(\beta_{ij} : i < j)$ и тремя отрицательными $(\beta_{ji} = -\beta_{ij})$, которые представлены на рис. 1.1. Таким образом, получаем систему на окружности S^1 с шестью центрами силы. Угловая часть гамильтониана

$$\mathcal{I} = \frac{p_\varphi^2}{2} + \frac{g}{2 \cos^2 \varphi} + \frac{g}{2 \cos^2(\varphi + \pi/3)} + \frac{g}{2 \cos^2(\varphi - \pi/3)} = \frac{p_\varphi^2}{2} + \frac{9g}{1 + \cos 6\varphi} \quad (1.10)$$

совпадает с гамильтонианом осциллятора Хиггса на сфере. Она инвариантна относительно поворота на $\pi/3$ и отражение $\varphi \rightarrow -\varphi$, которые порождают группу симметрии $D_6 \equiv S_3 \times Z_2$ правильного шестиугольника (см. рис. 1.1)). Здесь S_3 – симметрическая группа перестановок трёх частиц которую $\mathcal{I}$ наследует от исходного гамильтониана (1.1), а Z_2 соответствует её симметрии при отражении $q_i \rightarrow -q_i$. Интегрируемость этой системы очевидна. Заметим, что расщепление трёхчастичного гамильтониана на угловые и радиальные части было использовано для детального изучения квантования [55].

Для примера рассмотрим трехчастичную систему на сфере S^2 без предварительной редукции центра масс. Её суперинтегрируемость была подробно изучена (см. [21, 184] и ссылки там). При этом выживают три из пяти функционально независимых интегралов движения исходной системы Калоджеро. А именно, сам

гамильтониан $\tilde{\mathcal{H}} = p_r^2/2 + \mathcal{I}/r^2$ и его интеграл

$$\mathcal{F} = \left(p_r^2 - \frac{6\mathcal{I}}{r^2} \right) p_r \sin 3\varphi + \left(3p_r^2 - \frac{2\mathcal{I}}{r^2} \right) \frac{p_\varphi \cos 3\varphi}{r} \quad (1.11)$$

получаются из интегралов Лиувилля второго и третьего порядка. А третья сохраняющаяся величина

$$\mathcal{K} = \left(p_r^2 - \frac{6\mathcal{I}}{r^2} \right) p_r p_\varphi \cos 3\varphi - \left(3p_r^2 - \frac{2\mathcal{I}}{r^2} \right) \frac{2\mathcal{I} \sin 3\varphi}{r} \quad (1.12)$$

наследуется от дополнительного интеграла третьего порядка. Интегралы $\tilde{\mathcal{H}}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{K}$ функционально независимы. Мы выразили их через угловую часть гамильтониана (1.10), которая также сохраняется. Скобка Пуассона с ним переводит интеграл Лиувилля в дополнительный:

$$\{\mathcal{I}, \mathcal{F}\} = 3\mathcal{K}, \quad \{\mathcal{I}, \mathcal{K}\} = -6\mathcal{I}\mathcal{F}. \quad (1.13)$$

Четыре величины $\tilde{\mathcal{H}}$, $\mathcal{I}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{K}$ образуют переполненный набор констант движения.

Они удовлетворяют алгебраическому соотношению

$$\mathcal{K}^2 + 2\mathcal{I}\mathcal{F}^2 = 8\tilde{\mathcal{H}}^3(2\mathcal{I} - 9g), \quad \text{or} \quad \mathcal{I} = \frac{\mathcal{K}^2 + 72g\tilde{\mathcal{H}}^3}{16\tilde{\mathcal{H}}^3 - 2\mathcal{F}^2}. \quad (1.14)$$

Таким образом, $\tilde{\mathcal{H}}$, $\mathcal{I}$ и $\mathcal{F}$ образуют полный набор функционально независимых сохраняющихся величин. Первые два из них квадратичны по импульсам, что обеспечивает разделение переменных в системе.

Легко проверить, что скобки Пуассона (1.13) соответствуют соотношению (1.14). Наконец, с помощью (1.14) и первого уравнения в (1.13) получаем скобку Пуассона между интегралами третьего порядка:

$$\{\mathcal{K}, \mathcal{F}\} = 3(8\tilde{\mathcal{H}}^3 - \mathcal{F}^2) = 3 \frac{\mathcal{K}^2 + 9g\mathcal{F}^2}{2\mathcal{I} - 9g}.$$

1.2.2 Редукция четырехчастичной системы на сферу

В четырехчастичном случае все становится гораздо сложнее, хотя в этом случае существует более простой переход к системе центр масс, чем преобразование Яко-

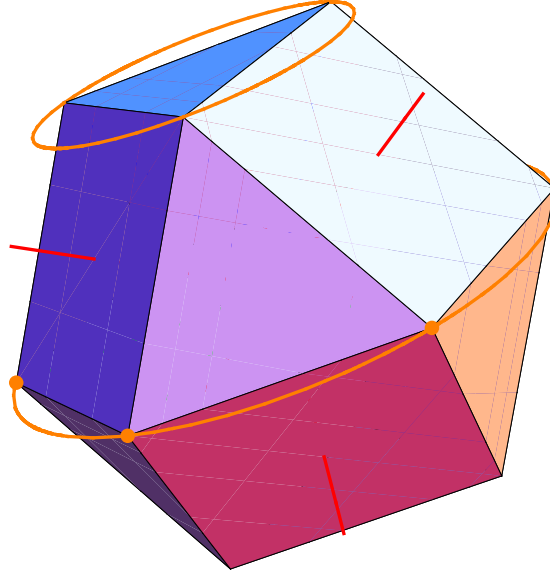


Рис. 1.2: Векторы (1.19) вместе с противоположными им векторами образуют кубоктаэдр. Они также задают корневую систему алгебры $su(4)$. Жирные точки на большой окружности задают векторы $\mathbf{b}^{23}$, $\mathbf{b}^{34}$ и $\mathbf{b}^{24}$, а точки на малой окружности – остальные три вектора. Жирные линии соответствуют осям координатной системы.

би (1.122):

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{2}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4), & Q_1 &= \frac{1}{2}(q_1 + q_2 - q_3 - q_4), \\ Q_2 &= \frac{1}{2}(q_1 - q_2 + q_3 - q_4), & Q_3 &= \frac{1}{2}(q_1 - q_2 - q_3 + q_4). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Преобразование Якоби получается применением дополнительного трёхмерного поворота, не затрагивающего центр масс. В целях экономии, мы оставили те же обозначения для новых координат, что и в (1.122). Аналогично преобразуются и импульсы.

Исключая центр масс, получим трехчастичный гамильтониан (1.129), который на самом деле эквивалентен модели Калоджеро с корневой системой Дынкина D_3 [160, 161]:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^3 \frac{P_i^2}{2} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left(\frac{g^2}{(Q_i - Q_j)^2} + \frac{g^2}{(Q_i + Q_j)^2} \right) = \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{\mathcal{I}(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi)}{2r^2}. \quad (1.16)$$

Впрочем, это ожидаемый результат, поскольку диаграммы D_3 и A_3 совпадают и

определяют одну и ту же алгебру $su(4)$ (по классификации Дынкина D_n определена для $n \geq 4$). Во втором уравнении мы ввели сферические координаты (r, θ, φ) вместе с сопряжёнными им импульсами $(p_r, p_\theta, p_\varphi)$.

Угловая часть гамильтониана (1.16) имеет следующий вид:

$$\mathcal{I}(p_\theta, p_\varphi, \theta, \varphi) = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} + \frac{2g^2}{\sin^2 \theta} \times \sum_{\pm} \left[\frac{1}{(\cos \varphi \pm \sin \varphi)^2} + \frac{1}{(\cot \theta \pm \sin \varphi)^2} + \frac{1}{(\cot \theta \pm \cos \varphi)^2} \right]. \quad (1.17)$$

Ей соответствует сферическая симплектическая структура

$$\omega_0 = dp_\theta \wedge d\theta + dp_\varphi \wedge d\varphi.$$

Гамильтониан приводится к следующей форме:

$$\mathcal{I} = \frac{p_\theta^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} + \frac{4g}{\sin^2 \theta} \left[\frac{1}{1 + \cos 4\varphi} + \frac{k - 6}{k - 8 + 8/k - k \cos 4\varphi} + \frac{4(k - 16 + 16/k)}{(k - 8 + 8/k - k \cos 4\varphi)^2} \right], \quad k = \tan^2 \theta. \quad (1.18)$$

В этих координатах проявляется явным образом инвариантность относительно циклической группы Z_4 дискретных вращений $\varphi \rightarrow \varphi + \pi/4$ и группы Z_2 пространственных отражений $\theta \rightarrow \pi - \theta$, которые являются подгруппами в O_h .

Поскольку сферическая механика (1.17) была получена из модели Калоджеро, она также интегрируема. Получается система на сфере с шестью центрами силы, которые определяются векторами

$$\begin{aligned} \beta_{12} &= (0, 1, 1), & \beta_{13} &= (1, 0, 1) & \beta_{14} &= (1, 1, 0), \\ \beta_{23} &= (1, -1, 0), & \beta_{24} &= (1, 0, -1), & \beta_{34} &= (0, 1, -1). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Концы векторов β_{ij} вместе с противоположными им $\beta^{ji} = -\beta_{ij}$ образуют кубооктаэдр, который является архимедовым многогранником, как показано на рисунке 1.2. Этот многогранник, как и куб, обладает октаэдрической симметрией $O_h \equiv S_4 \otimes Z_2$ порядка 48, что отражает дискретную симметрию базовой системы Калоджеро. Отметим, что S_4 изоморфна группе Вейля алгебры A_3 и сохраняет

ориентацию кубookтаэдра. Подгруппа Z_2 соответствует отражению $x_i \rightarrow -x_i$ всех четырех координат. В Ли алгебраическое описание, оно соответствует инвариантности схемы Дынкина при отражении.

Заметим, что вектора $\mathbf{b}^{23}$, $\mathbf{b}^{34}$ и $\mathbf{b}^{24}$ лежат на экваториальной плоскости, а углы между ними соответственно равны $\pi/3$ и $2\pi/3$. Их вершины и вершины противоположных векторов образуют шестиугольник (Рис. 1.2). Их расположение в точности совпадает с расположением аналогичных векторов в трехчастичной модели (Рис. 1.1). Вершины векторов $\mathbf{b}^{12}$, $\mathbf{b}^{13}$, $\mathbf{b}^{14}$ расположены на плоскости, параллельной экваториальной. Они образуют треугольную грань кубookтаэдра, которая сдвинута на угол $\pi/6$ относительно треугольника $(\mathbf{b}^{23}, \mathbf{b}^{34}, -\mathbf{b}^{24})$.

Выберем декартовы координаты, в которых первая ось направлена вдоль $\mathbf{b}^{13}$, а вторая лежит в плоскости, образованной векторами $\mathbf{b}^{12}$ и $\mathbf{b}^{13}$. Направления базисных векторов ортогональны треугольным граням кубookтаэдра (Рис. 1.2). В соответствующей сферической системе координат угловая часть гамильтониана имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = & \frac{p_\theta^2}{2} + \frac{p_\varphi^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{9g(8 - \tan^2 \theta)^2}{2(3 \tan^2 \theta - 8 + \tan^3 \theta \cos 3\varphi)^2} \\ & + \frac{12g}{3 \tan^2 \theta - 8 + \tan^3 \theta \cos 3\varphi} + \frac{9g}{4 \sin^2 \theta (1 + \cos 6\varphi)}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Инвариантность относительно группы вращений Z_3 на угол $2\pi/3$ относительно третьей оси теперь очевидна.

Потенциал (1.20) имеет достаточно сложный вид. Трудно поверить, что система с таким потенциалом может быть интегрируемой.

1.3 Угловая часть системы Калоджеро как редукция матричной модели

1.3.1 Соответствие матричной модели

Лиувиллевские интегралы движения модели Калоджеро (1.1) [149, 167, 64]:

$$I_k = (L^k) := \text{tr } L^k, \quad 1 \leq k \leq N \quad (1.21)$$

выражаются через матрицу Лакса

$$L_{jk} = \delta_{jk} p_k + (1 - \delta_{jk}) \frac{ig}{q_j - q_k}. \quad (1.22)$$

Для удобства, в дальнейшем след матрицы обозначается круглыми скобками. Модель Калоджеро может быть получена из свободной эрмитовой матричной модели

$$H = \frac{1}{2} (P^2), \quad P^+ = P, \quad Q^+ = Q, \quad \{P_{ij}, Q_{j'i'}\} = \delta_{ii'} \delta_{jj'} \quad (1.23)$$

редукцией по группе $SU(N)$, которая действует по правилу

$$P \rightarrow U P U^+, \quad Q \rightarrow U Q U^+. \quad (1.24)$$

Это действие сохраняет скобки Пуассона. Соответствующий сохраняющийся ток задаётся бесследной эрмитовой матрицей [167]

$$J = i[Q, P]. \quad (1.25)$$

С помощью этой симметрии можно диагонализировать матрицу координат:

$$Q_{jk} \rightarrow q_j \delta_{jk}. \quad (1.26)$$

Тогда в соответствии с соотношением (1.25) недиагональные элементы матрицы J определяют соответствующие элементы редуцированной матрицы P :

$$P_{jk} \rightarrow -i \frac{J_{jk}}{q_j - q_k}, \quad j \neq k.$$

Диагональные же элементы p_j матрицы P остаются независимыми и сопряжены с координатами, т. е. $\{p_j, q_k\} = \delta_{jk}$. Простейший анзац для матрицы J – равное постоянное значение для всех недиагональных элементов, т. е. $J_{jk} = -g$ при условии $j \neq k$, – воссоздаёт матрицу Лакса (1.22) для обычной модели Калоджеро:

$$P_{jk} \rightarrow L_{jk}. \quad (1.27)$$

После фиксации калибровки коммутатор (1.25) сводится к выражению

$$[Q, P]_{jk} = ig(\delta_{jk} - u_j u_k), \quad \text{где} \quad u_i = 1. \quad (1.28)$$

Выберем для генераторов группы $SU(N)$ ортонормированный базис $\{T_a\}$, $a = 0, 1, \dots, N^2 - 1$

$$(T_a T_b) = \delta_{ab}, \quad [T_a, T_b] = \sum_c i f_{abc} T_c \quad (1.29)$$

с действительными антисимметричными структурными константами f_{abc} и разложим эрмитовы матрицы по ним:

$$Q = \sum_a Q_a T_a, \quad P = \sum_a P_a T_a. \quad (1.30)$$

В соответствии с разложением $U(N) = U(1) \times SU(N)$, возьмём в качестве $U(1)$ генератора единичную матрицу T_0 , а остальные генераторы T_a зададим бесследными эрмитовыми матрицами. Стандартный вид этого базиса приведен в Приложении (выражения (1.116), (1.117) и (1.118)). Коэффициенты P_a и Q_a взаимно сопряжены [166, 167]:

$$\{P_a, Q_b\} = \delta_{ab},$$

что вытекает из скобок Пуассона в (1.23), и соотношения полноты, которому удовлетворяют генераторы $U(N)$.

Определим, как обычно, тензор углового момента M для матричной модели:

$$M_{ab} = P_a Q_b - P_b Q_a. \quad (1.31)$$

Его компоненты M_{ab} образуют алгебру $so(N^2)$:

$$\{M_{ab}, M_{a'b'}\} = \delta_{ab'} M_{a'b} + \delta_{ba'} M_{ab'} - \delta_{aa'} M_{bb'} - \delta_{bb'} M_{aa'}. \quad (1.32)$$

В инвариантной форме угловой момент имеет следующий вид:

$$M = P \wedge Q \equiv P \otimes Q - Q \otimes P = \sum_{a,b} M_{ab} T_a \otimes T_b. \quad (1.33)$$

Компоненты $J_c = (JT_c)$ сохраняющегося тока (1.25) выражаются через компоненты углового момента:

$$J_c = -\frac{i}{2} \sum_{a,b} f_{abc} M_{ab}. \quad (1.34)$$

Конечно, они удовлетворяют алгебре $su(N)$:

$$\{J_a, J_b\} = i \sum_c f_{abc} J_c, \quad (1.35)$$

что можно легко проверить с помощью коммутационных соотношений (1.32).

Матричная модель обладает также $U(1)$ симметрией, которая задается трансляциями

$$Q \rightarrow Q + \epsilon \mathbf{1}, \quad P \rightarrow P. \quad (1.36)$$

Соответствующий сохраняющийся ток имеет следующий вид (см. (1.119) в приложении):

$$(P) \sim P_0. \quad (1.37)$$

$SU(N)$ преобразования сохраняют его, поэтому он находится в инволюции с токами J_a , что можно также проверить с помощью соотношений (1.23) и (1.25). Вместе эти токи порождают группу $U(1) \times SU(N) = U(N)$. Редукция по $U(1)$ исключает координату и импульс центра масс модели Калоджеро:

$$(P) = \sum_i p_i = 0, \quad (Q) = \sum_i q_i = 0.$$

Действие матричной модели $-S = \frac{1}{2} \int \text{tr} \dot{Q}^2 dt$ остается неизменным при конформных преобразованиях, образующих алгебру $sl(2, R)$, которая в введенных на-

ми обозначениях принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} D &= (PQ) = \sum_a Q_a P_a, \\ K &= \frac{1}{2} (Q^2) = \frac{1}{2} \sum_a Q_a^2, \\ H &= \frac{1}{2} (P^2) = \frac{1}{2} \sum_a P_a^2. \end{aligned} \tag{1.38}$$

Стандартный базис этой алгебры имеет вид

$$J_1 = H + K, \quad J_2 = D, \quad J_3 = H - K, \quad \{J_\alpha, J_\beta\} = -2\epsilon_{\alpha\beta\gamma} J^\gamma, \tag{1.39}$$

где индексы поднимаются с помощью конформной метрики $\text{diag}(1, -1, -1)$. Конформная алгебра находится в инволюции с тензором углового момента:

$$\{M_{ab}, sl(2, R)\} = 0 \tag{1.40}$$

и, следовательно, с $su(N)$ алгеброй (1.34), (1.35). Последнее условие следует также из инвариантности следа (1.38) при калибровочных преобразованиях (1.24).

Элемент Казимира алгебры (1.2)

$$\mathcal{I} = \sum_\alpha J_\alpha J^\alpha = 4KH - D^2 = (P^2)(Q^2) - (PQ)^2. \tag{1.41}$$

определяет гамильтониан матричной модели, редукция которого соответствует сферической части модели Калоджеро (1.4). Его можно рассматривать как отдельную систему, которую в дальнейшем будем называть *сферической механикой*. Он также выражается через угловой момент (1.31):

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} (\text{tr} \otimes \text{tr}) M^2 = \sum_{a < b} M_{ab}^2. \tag{1.42}$$

Заметим, что конформные генераторы (1.38) состоят из независимых частей, каждая из которых задаётся отдельной координатой и импульсом. Однако, как было сказано выше, $SU(N)$ редукция к модели Калоджеро (1.26), (1.26) перемещивает все компоненты кроме первого, которая соответствует центру масс. Таким

образом, конформная алгебра (1.38) разлагается на две независимые конформные алгебры:

$$J_\alpha = J_\alpha^{\text{red}} + J_\alpha^0, \quad (1.43)$$

где J_α^0 определяется членами с нулевыми компонентами в выражениях (1.38):

$$D_0 = P_0 Q_0, \quad K_0 = \frac{1}{2} Q_0^2, \quad H_0 = \frac{1}{2} P_0^2,$$

а J_α^{red} – остальными их членами. Для элемента Казимира имеем:

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{red}} + 2 J_\alpha^{\text{red}} J^{0\alpha}. \quad (1.44)$$

Это соотношение устанавливает связь между сферическими системами с учётом и без учёта центра масс.

1.3.2 Интегралы движения сферической механики

Прежде чем обсуждать интегралы движения сферической механики, напомним прообразы интегралов движения Лиувилля для модели Калоджеро (1.21) в матричной модели:

$$I_k = (P^k) = \sum_{a_1, \dots, a_k} d_{a_1 \dots a_k} P_{a_1} \dots P_{a_k}. \quad 0 \leq a_i \leq N^2 - 1, \quad (1.45)$$

Здесь коэффициенты $d_{a_1 \dots a_k}$ являются $U(N)$ инвариантными тензорами:

$$d_{a_1 \dots a_k} = (T_{a_1} \dots T_{a_k}). \quad (1.46)$$

В частности,

$$d_a = \delta_{a0}, \quad d_{ab} = \delta_{ab}. \quad (1.47)$$

Первые две константы движения пропорциональны суммарному импульсу и энергии системы. Подставляя $p_0 = 0$ в (1.45), получим интегралы движения для системы с исключенным центром масс:

$$I_k^{\text{red}} = \sum_{b_1, \dots, b_k} d_{b_1 \dots b_k} P_{b_1} \dots P_{b_k}, \quad 1 \leq b_i \leq N^2 - 1. \quad (1.48)$$

Поскольку первая константа движения равна нулю из-за условия (1.47), остаются только $N - 1$ независимых интегралов Лиувилля. Тогда соотношение между интегралами движения системы Калоджеро с учётом и без учёта центра масс принимает вид:

$$I_k \rightarrow \sum_{i=0}^k N^{\frac{i-k}{2}} \binom{k}{i} P_0^{k-i} I_i^{\text{red}}, \quad (1.49)$$

где мы положили $I_0^{\text{red}} = 1$ и $I_1^{\text{red}} = 0$. Это следует из соотношения между инвариантными тензорами для $SU(N)$ и $U(N)$ групп:

$$d_{a_1 \dots a_k} = N^{-\frac{k-k'}{2}} d_{a_{r_1} \dots a_{r_{k'}}}, \quad (1.50)$$

где $r_1, \dots, r_{k'}$ задают позиции индексов с ненулевыми значениями, взятыми в порядке возрастания, т. е. $a_{r_i} > 0$. Уравнение (1.50) следует из (1.116), (1.117) и (1.46). Аналогичное соотношение можно получить между дополнительными интегралами G_k обеих систем (1.44).

Интегралы движения сферической механики (1.3) должны находиться в инволюции со всей конформной алгеброй (1.2), так как они выражаются через угловые координаты и импульсы, в то время как генераторы конформной алгебры зависят только от радиальных координаты и импульса. Таким образом, эти интегралы являются $SL(2, R)$ синглетами. С другой стороны, они должны быть скалярами также и относительно $SU(N)$ группы, иначе редукция по ней не была бы корректной. Таким образом,

$SU(N) \times SL(2, R)$ синглеты образуют всю алгебру интегралов сферической механики.

Чтобы выписать их, есть два способа: скомпоновать $SU(N)$ инварианты из $SL(2, R)$ инвариантов и, наоборот, скомпоновать $SL(2, R)$ инварианты из $SU(N)$ инвариантов. В обоих подходах выражения для интегралов сферического гамильтониана имеют достаточно сложный вид, однако, обладают простым графическим представлением.

$$M_{ab} = \begin{array}{c} a \longrightarrow b \end{array} \qquad d_{abcde} = \begin{array}{c} \text{---} a \text{---} b \text{---} c \text{---} d \text{---} e \text{---} \\ \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \end{array}$$

Рис. 1.3: Графическое представление углового момента и инвариантных тензоров.

$$\begin{array}{c} b \\ \uparrow \\ a \end{array} \begin{array}{c} b' \\ \uparrow \\ a' \end{array} = \begin{array}{c} b \quad b' \\ \swarrow \quad \nearrow \\ a \quad a' \end{array} + \begin{array}{c} b \longrightarrow b' \\ a \longrightarrow a' \end{array}$$

Рис. 1.4: Схематическое изображение перекрестных соотношений (1.51).

Как было сказано выше, $SL(2, R)$ инвариант можно выразить через тензор момента импульса M_{ab} с индексами, соответствующими присоединенному представлению $SU(N)$. В то же время, $SU(N)$ инвариант может быть построен сверткой однокленов $M_{a_1 b_1} \dots M_{a_k b_k}$ с инвариантными тензорами (1.46). Это наблюдаемое является полиномиальной константой движения $\mathcal{I}$ k -го порядка по переменным M_{ab} и P_a . Представим его в графической форме, нарисовав тензор момента импульса в виде вектора с конечной или начальной точками, наделенными соответствующими индексами. Свертку же с инвариантным тензором изобразим включением соответствующих конечных или начальных точек внутрь овала, как показано на рис. 1.3. Вся диаграмма состоит из векторов с концами, распределёнными некоторым способом по овалам. Некоторые из диаграмм выражаются через другие или зануляются. В частности, квадратичное перекрестное соотношение между компонентами момента импульса

$$M_{a'b} M_{ab'} = M_{ab} M_{a'b'} - M_{aa'} M_{bb'}, \quad (1.51)$$

которое является следствием определения (1.33) и представлено графически на Рис. 1.4, значительно сокращает число функционально независимых интегралов.

Ясно, что инвариант, соответствующий несвязанной диаграмме, является произведением инвариантов, соответствующих его связанным частям. Хотя порядок индексов в овалах существенен, любая их перестановка изменяет значение на-

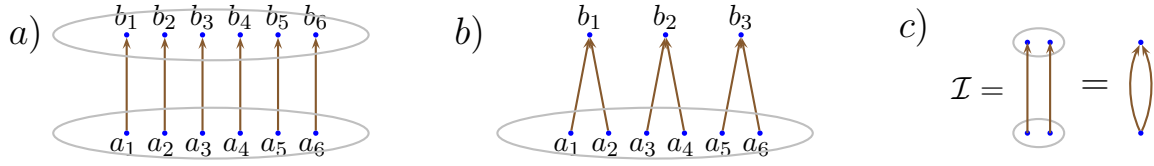


Рис. 1.5: Диаграммы инвариантов: а) $\mathcal{I}_k$, б) $\mathcal{I}'_k$ и в) $\mathcal{I}$.

блюдаемой на величину, которая выражается через те же интегралы, но только имеющие более низкий порядок по импульсам. Это следует из соотношений (1.51), антисимметричности тензора углового момента и определения тока J_c (1.34), который при редукции становится числом:

$$\sum_{a,b} (\dots [T_a, T_b] \dots) M_{aa'} M_{bb'} = \frac{i}{2} \sum_{a,b,e} f_{abe} (\dots T_e \dots) M_{ab} M_{a'b'} = -\frac{1}{2} \sum_e J_e d_{\dots e \dots} M_{a'b'}.$$

Более того, если два индекса инвариантного тензора свертываются с одним M_{ab} , то соответствующий интеграл сводится к комбинации интегралов более низкого порядка. Действительно, имеем:

$$\sum_{a,b} d_{ab \dots} M_{ab} = \sum_{a,b} (T_a T_b \dots) M_{ab} = \sum_{a,b,c} \frac{i}{2} f_{abc} d_{c \dots} M_{ab} = - \sum_c J_c d_{c \dots}.$$

Поэтому без ограничения общности можно представить диаграмму в виде инвариантных тензоров (представленных овалами), расположенных вдоль одной линии или окружности, связанных взаимно не пересекающимися векторами углового момента.

В качестве примера рассмотрим аналог интегралов Лиувилля (1.45) исходного гамильтониана. Для сферического гамильтониана берем угловой момент вместо импульса:

$$\mathcal{I}_k = (M^{2k}) := (\text{tr} \otimes \text{tr}) M^{2k} = \sum_{a_i, b_i} d_{a_1 \dots a_{2k}} d_{b_1 \dots b_{2k}} M_{a_1 b_1} \dots M_{a_{2k} b_{2k}}. \quad (1.52)$$

Заметим, что из-за антисимметричности M_{ab} нечетные степени зануляются. Соответствующая схема приведена на Рис. 1.5а. В отличие от своих аналогов (1.45),

$$\begin{array}{c} a \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} a \quad b \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = \sum_c M_{ca} M_{cb} \qquad \begin{array}{c} a \\ \uparrow \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} = \begin{array}{c} a \\ \uparrow \\ \text{---} \bullet \text{---} \end{array} = M_{0a}$$

Рис. 1.6: Группа из двух индексов заменяется одним индексом.

эти сферические интегралы не находятся в инволюции. Их скобка равна

$$\{\mathcal{I}_n, \mathcal{I}_m\} = 4nm\mathcal{I}_{n,m}, \quad (1.53)$$

где $\mathcal{I}_{n,m}$ является комбинированной диаграммой, представленной на рис. 1.5b и 1.5c. Приведенное соотношение является следствием (1.32), циклической симметрии инвариантных тензоров (1.46) и соотношения полноты:

$$\sum_{a=0}^{N^2-1} d_{a_1 \dots a_{n-1} a} d_{a a_n \dots a_{n+m-1}} = d_{a_1 a_2 \dots a_{n+m-1}}, \quad (1.54)$$

которое следует из (1.130). Для системы без центра масс последнее соотношение в соответствии с (1.131) принимает вид:

$$\sum_{b=1}^{N^2-1} d_{b_1 \dots b_{n-1} b} d_{b b_n \dots b_{n+m-1}} = d_{b_1 b_2 \dots b_{n+m-1}} + \frac{1}{N} d_{b_1 \dots b_{n-1}} d_{b_n \dots b_{n+m-1}}. \quad (1.55)$$

Как следствие, коммутатор (1.53) равен:

$$\{\mathcal{I}_n^{\text{red}}, \mathcal{I}_m^{\text{red}}\} = 4nm \left(\mathcal{I}_{n,m}^{\text{red}} - \frac{1}{N} \mathcal{I}_{n,m}'^{\text{red}} \right), \quad (1.56)$$

где $\mathcal{I}_{n,m}'$ получается из $\mathcal{I}_{n,m}$ расщеплением самого длинного овала, как показано на рис. 1.7.

Ввиду $d_{ab} = \delta_{ab}$, двухточечный овал можно заменить одной точкой как показано на рис. 1.6. Таким образом, первый интеграл из семейства (1.52) просто совпадает со сферическим гамильтонианом $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}$ (см. рис 1.7c). Одноточечный овал отличен от нуля только при наличии центра масс, так как $d_a = \delta_{0a}$ (см. тот же рисунок). Это свойство значительно снижает число независимых инвариантов для сферической механики без центра масс, облегчая их дальнейшую классификацию.

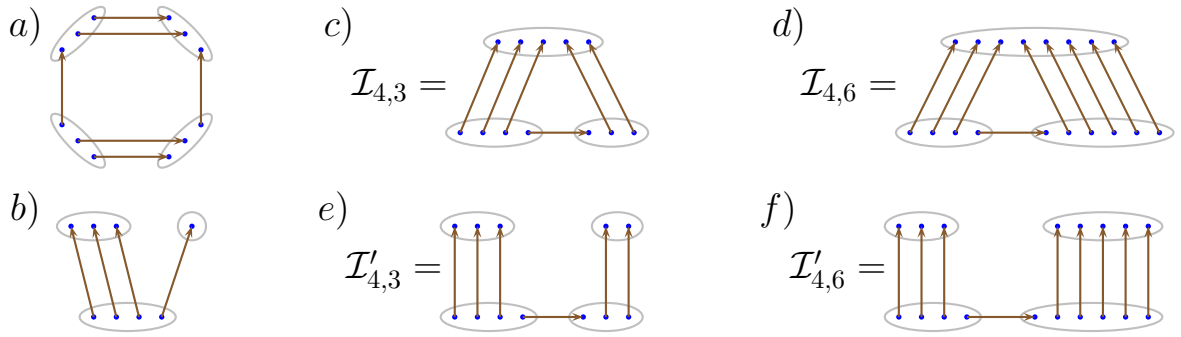


Рис. 1.7: Схематическое представление некоторых сферических инвариантов.

Другое семейство интегралов движения получается попарным свертыванием первых индексов соседних тензоров углового момента (тензор $\delta_{aa'}$ является инвариантом) с последующим свертыванием их вторых индексов с инвариантным тензором порядка $2k$:

$$\mathcal{I}'_k = (R^k) = \sum_{a_i, b_i, b'_i} d_{b_1 b'_1 \dots b_k b'_k} M_{a_1 b_1} M_{a_1 b'_1} \dots M_{a_k b_k} M_{a_k b'_k}, \quad R = (\text{tr} \otimes 1) M^2. \quad (1.57)$$

Эти интегралы возникали в работе [209] как интегралы движения для системы с гамильтонианом, равным HK . Отметим, что первый из них совпадает со сферическим гамильтонианом: $\mathcal{I}'_1 = \mathcal{I}$.

Более сложные инварианты могут содержать петли из векторов углового момента. Общее число этих векторов задает порядок по импульсам (или по моментам импульсов) соответствующих инвариантов. На рисунках 1.7, 1.8 и 1.9 представлены примеры констант движения сферической гамильтониана. Запишем, например, инвариант, соответствующий диаграмме шестого порядка на рис. 1.9с:

$$\sum_{\text{all indices}} d_{abc} d_{a'b'c'} M_{ad} M_{a'd} M_{bb'} M_{cc'}.$$

Конечно, лишь конечное число диаграмм функционально независимы. При наличии симметрии при отражении, меняющей знак, соответствующая наблюдаемая зануляется. Два таких примера показаны на рис. 1.8. Рассмотрим, например, ин-

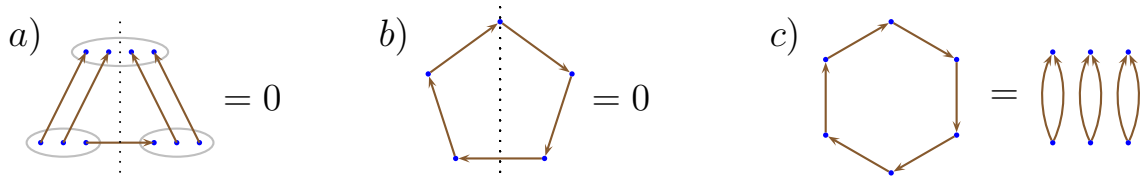


Рис. 1.8: Первые две диаграммы зануляются, поскольку меняют знак при отражении относительно оси симметрии, обозначенной пунктирной линией. Инварианты (1.58) задаются n -угольником.

вариант

$$\sum_{a_1 \dots a_n} M_{a_1 a_2} M_{a_2 a_3} \dots M_{a_n a_1} = \text{tr } \mathcal{M}^n, \quad (1.58)$$

где, в отличие от M , определенного в (1.33), каллиграфическое обозначение $\mathcal{M} = (M_{ab})$ представляет тензор момента импульса в виде обычной антисимметричной матрицы. Данный инвариант описывается n -угольником как показано на рис. 1.8. Для нечетных n он равен нулю из-за антисимметрии по отношению к инверсии $M_{ab} \rightarrow M_{ba}$ всех векторов. Четные же значения соответствуют инвариантам Казимира алгебры $SO(N^2)$. Как можно легко убедиться, перекрестные соотношения (1.51) предполагают равенства:

$$\mathcal{M}^n = \frac{1}{2} (\text{tr } \mathcal{M}^2) \mathcal{M}^{n-2} = \mathcal{I} \mathcal{M}^{n-2}.$$

Таким образом, инвариант (1.58) выражается через степень сферического гамильтониана (см. рис. 1.8a):

$$\text{tr } \mathcal{M}^n = \mathcal{I}^{n/2}.$$

Используя соотношение (1.50), которое выражает $U(N)$ инвариантные тензоры через $SU(N)$ инвариантные, соотношения между инвариантами конформной механики с центром масс и без центра масс (1.49) можно распространить на сферические инварианты. Для сферических гамильтонианов эта связь задается с помощью

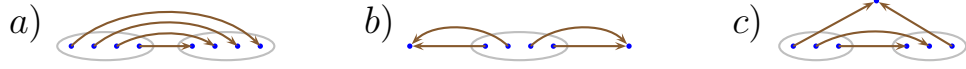


Рис. 1.9: Три независимых инварианта четвертого порядка.

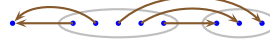


Рис. 1.10: Единственный инвариант пятого порядка.

(1.44). В общем случае применяется соотношение

$$\sum_{a_1, a_2=0}^{N^2-1} d_{\dots a_1 \dots}^{(k_1)} d_{\dots a_2 \dots}^{(k_2)} M_{a_1 a_2} = \sum_{b_1, b_2=1}^{N^2-1} d_{\dots b_1 \dots}^{(k_1)} d_{\dots b_2 \dots}^{(k_2)} M_{b_1 b_2} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{b=1}^{N^2-1} \left(d_{\dots b \dots}^{(k_1)} d_{\dots \dots}^{(k_2-1)} - d_{\dots \dots}^{(k_1-1)} d_{\dots b \dots}^{(k_2)} \right) M_{b0},$$

где k_1, k_2 обозначают порядок двух инвариантных тензоров. В результате сферический инвариант распадается на $3^{\sum k}$ части и может быть скомбинирован в полином по M_{0b} .

1.3.3 Независимые инварианты и предел свободных частиц.

В дальнейшем мы рассматриваем сферическую механику с исключенным центром масс. Она является суперинтегрируемой системой на $(N - 2)$ -мерной сфере с $2N - 5$ функционально независимыми интегралами движения. Кроме самого сферического гамильтониана (см. рис. 1.5с), нет инвариантов второго порядка по импульсам. Не существует также нетривиальных инвариантов третьего порядка, но есть три независимых инварианта четвертого порядка и один инвариант пятого порядка. Они изображены соответственно на рис. 1.9а и 1.9б. Вместе со сферическим гамильтонианом они образуют независимый набор инвариантов вплоть до пятого порядка по импульсам. Здесь функциональная независимость понимается в пределе большого числа частиц: $N \rightarrow \infty$. Для достаточно малых чисел частиц

появляются дополнительные алгебраические соотношения, уменьшая число независимых интегралов.

Имеется шестнадцать инвариантов шестого порядка. В целях упрощения графики и экономии места, овалы стянуты в точки. Например, диаграммы четвертого порядка на рис. 1.9 эквивалентны диаграммам на рис. 1.11. Все независимые инварианты шестого порядка показаны на рис. 1.12. Остальные либо исчезают, либо выражаются через них и инварианты более низкого порядка. Этот результат установлен прямым компьютерным расчетом.

В пределе $g \rightarrow 0$ интегралы движения значительно упрощаются. Напомним, что редукция матричной модели системы Калоджеро сохраняет только диагональные элементы матрицы координат (1.26). Кроме того, в пределе свободных частиц выживают только диагональные элементы P в соответствии с (1.21). Таким образом, остаются только компоненты Q_k , P_k и M_{kl} , соответствующие диагональной подалгебре Картана. Заметим, что ограничение инвариантного тензора на подалгебру Картана полностью симметрично. Предел $g \rightarrow 0$ соответствует старшему члену по импульсам:

$$I_k(g=0) = \sum_{i_1 \dots i_k=1}^N d'_{i_1 \dots i_k} p_{i_1} \dots p_{i_k} = \sum_{i=1}^N p_i^k. \quad (1.59)$$

Для простоты здесь используются обычные координаты модели Калоджеро. Соответствующий базис получается заменой $T_i \rightarrow E_{i+1 i+1}$ в (1.116), (1.117) и разложением диагонального элемента $P = \sum_{i=1}^N p_i E_{ii}$. В этом базисе индексы ненулевых элементов $U(N)$ инвариантного тензора совпадают:

$$d'_{i_1 i_2 \dots i_k} = (E_{i_1 i_1} \dots E_{i_k i_k}) = \delta_{i_1 i_2} \delta_{i_2 i_3} \dots \delta_{i_{k-1} i_k}, \quad 1 \leq i_l \leq N. \quad (1.60)$$

Возвращаясь к инвариантам сферической механики, мы видим, что упрощённые графы, определённые на рис. 1.11. и 1.12, в пределе свободных частиц приобретают простой смысл: каждая точка помечена одним индексом. Например, старшие

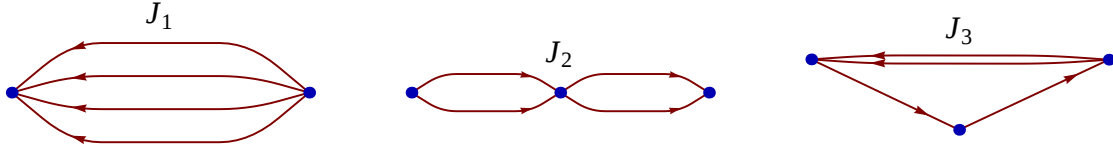


Рис. 1.11: Старшие члены для трех независимых инвариантов четвёртого порядка.

члены инвариантов (1.52) и (1.57) равны, соответственно,

$$\mathcal{I}_k(g=0) = \sum_{i,j=1}^N M_{ij}^{2k}, \quad \mathcal{I}'_k(g=0) = \sum_{i=1}^N (\mathcal{M}_{ii}^2)^k.$$

На рис. 1.12 представлены члены высшего порядка всех инвариантов шестого порядка. Они независимы для достаточно большого числа частиц.

В качестве примера, рассмотрим двумерную сферическую механику $\mathcal{I}^{\text{red}}$, соответствующую четырехчастичной модели Калоджеро с редуцированным центром масс. Кроме гамильтониана, он имеет два независимых инварианта: один из них может быть выбран четвертого порядка по импульсам, а другой – шестого порядка. Остальные интегралы движения выражаются через них.

1.4 Аналогия с состояниями спиновых синглетов, образованных валентными связями

В предыдущих разделах мы построили константы движения сферической механики путем комбинации инвариантов конформной алгебры M_{ab} с унитарно инвариантными тензорами. Те же константы можно получить следуя в обратном порядке, а именно путем комбинирования унитарно инвариантных мультиплетов конформной алгебры в конформные синглеты. Этот метод является дуальным предыдущему. Хотя результаты одинаковы, первый подход является более простым для описания и расчетов, а вторая интерпретирует интегралы движения как квантовые синглетные состояния конформной группы, образованные валентными

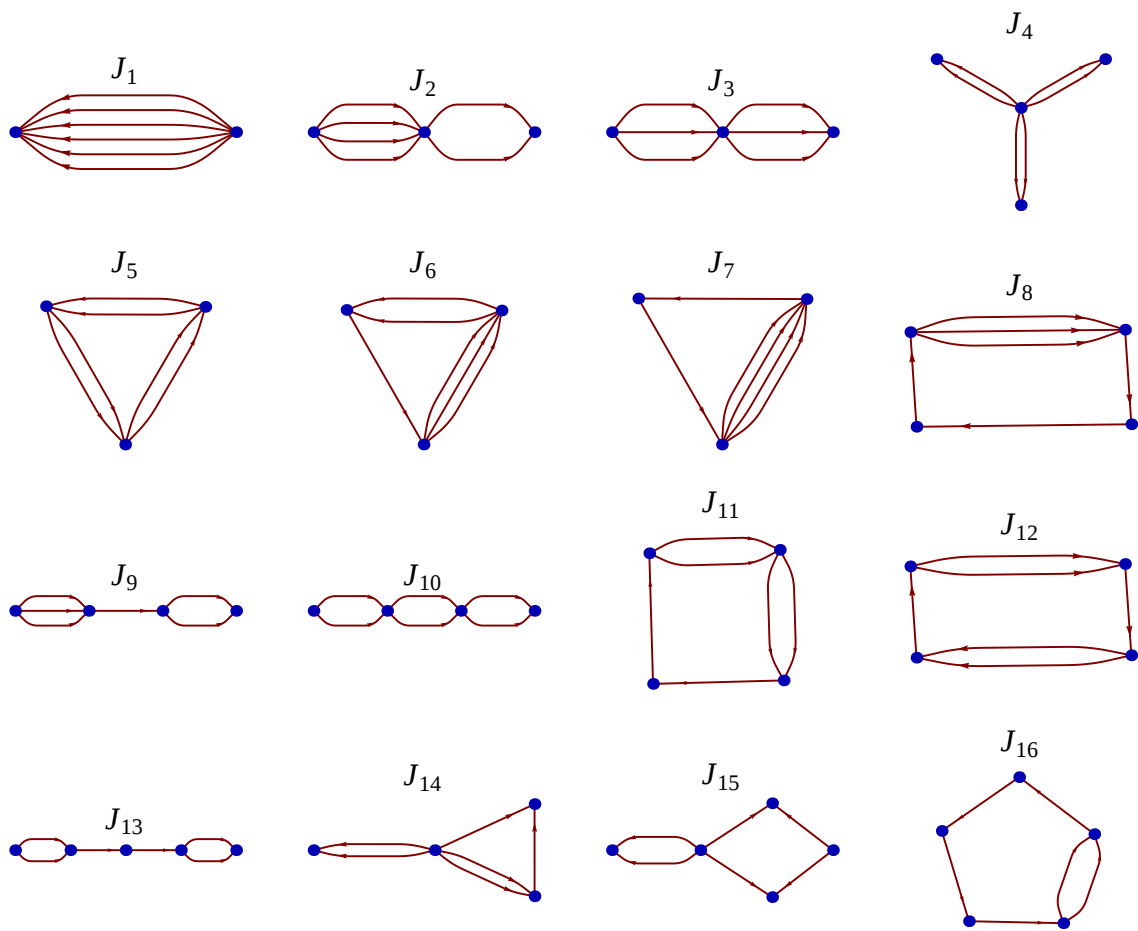


Рис. 1.12: Старшие члены для всех независимых инвариантов шестого порядка.

связями аналогично обычным спинным синглетам группы $SU(2)$ [197].

Сначала рассмотрим наблюдаемые матричной механики (1.23), которые выражаются через след произведения матриц P и Q :

$$O^{\sigma_1 \dots \sigma_n} = \sum_{a_1, \dots, a_n} d_{a_1 \dots a_n} A_{a_1}^{\sigma_1} \dots A_{a_n}^{\sigma_n} = (A^{\sigma_1} \dots A^{\sigma_n}), \quad (1.61)$$

$$\sigma_i = \pm, \quad A^+ = P, \quad A^- = Q.$$

Для дальнейшего удобства используем обозначения $A^\pm$ для динамических переменных. Канонические скобки Пуассона теперь имеют вид:

$$\{A_{ij}^\sigma, A_{j'i'}^{\sigma'}\} = \epsilon_{\sigma\sigma'} \delta_{ii'} \delta_{jj'}, \quad (1.62)$$

где $\epsilon_{\sigma\sigma'}$ – антисимметричный тензор, $\epsilon_{+-} = 1$. Величины (1.61) являются $SU(N)$ инвариантами. Они образуют линейную алгебру Пуассона [53]:

$$\{O^{\sigma_1 \dots \sigma_n}, O^{\sigma'_1 \dots \sigma'_m}\} = \sum_{i,j} \epsilon_{\sigma_i \sigma'_j} O^{\sigma_{i+1} \dots \sigma_{i-1} \sigma'_{j+1} \dots \sigma'_{j-1}}. \quad (1.63)$$

Это соотношение следует также из соотношения полноты между $U(N)$ инвариантными тензорами (1.54). Здесь предполагается циклический порядок в последнем следе. Отметим, что в квантовом случае появляются полиномиальные поправки в связи с упорядочением матричных элементов [95].

Угловой момент в новых обозначениях выражается следующим образом:

$$M_{ab} = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \epsilon_{\sigma_1 \sigma_2} A_a^{\sigma_1} A_b^{\sigma_2}. \quad (1.64)$$

Инварианты сферической механики могут быть выражены через (1.61) и $\epsilon_{\sigma\sigma'}$. Точнее, i -ая точка соответствующей диаграммы (см., например, Рис. 1.5 и 1.7) обозначается теперь через σ_i , в то время как сгруппированные вершины и их связи ассоциируются с $O^{\sigma_1 \dots \sigma_n}$ и $\epsilon_{\sigma_1 \sigma_2}$ соответственно, как показано на рис. 1.13. Сумма берется по всем σ_i . Это – дуальная интерпретация диаграммы. Ее можно получить, подставляя (1.64) в выражения для инвариантов с последующим использованием

$$\epsilon_{\sigma\sigma'} = \sigma \xrightarrow{\quad} \sigma' \qquad (A^{\sigma_1} \dots A^{\sigma_5}) = \underbrace{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5}_{\text{diagram with 5 dots in a row}}$$

Рис. 1.13: Дуальное графическое представление.

(1.61) и (1.46). Коммутационные соотношения между инвариантами, аналогичные (1.53) и (1.56) могут быть получены с использованием соотношений (1.63).

Конечно, только ограниченное количество описанных наблюдаемых являются независимыми. Кроме того, при редукции к системе Калоджеро, согласно (1.26) и (1.28), коммутационные отношения (1.28) устанавливают определенный порядок в произведении матриц P и Q . Наиболее часто используется нормальное упорядочение, либо упорядочение Вейля (симметризованное упорядочение) [30, 98, 16], которые определяются следующим образом:

$$I_{kl} = (P^k Q^l), \quad (1.65)$$

$$I_{kl}^{\text{sym}} = \text{Sym}(P^k Q^l) = \binom{k+l}{l}^{-1} \oint \frac{dz}{2i\pi z^{l+1}} \text{tr}(P + zQ)^{k+l}. \quad (1.66)$$

Симметризованные следы (1.66) при условии $k + l = 2s$ образуют $(2s + 1)$ -мерное (неунитарное) представление $sl(2, R)$ с конформным спином s со старшим вектором, соответствующим интегралам Лиувилля I_{2s} модели Калоджеро (1.45). Используя обычные обозначения теории представлений, представим их в виде

$$I_{s+m \ s-m}^{\text{sym}} = O^{(\sigma_1 \dots \sigma_{2s})} = \binom{2s}{s-m}^{-\frac{1}{2}} \psi_{sm}, \quad \text{где} \quad 2m = k - l, \quad (1.67)$$

$$(\sigma_1 \dots \sigma_{2s}) = (\underbrace{+ \dots +}_{s+m} \underbrace{- \dots -}_{s-m}).$$

Симметризация проводится по индексам внутри скобок. Действие генераторов конформной группы (1.38) можно проверить с помощью канонической скобки (1.62).

Величины $I_{k0} = I_k$ и I_{k1} совпадают с их симметризованными аналогами и образуют замкнутую алгебру Ли. Их квадратичные комбинации $I_k I_{l1} - I_l I_{k1}$ приводят к дополнительным интегралам системы Калоджеро [208]. Тем не менее, целый ряд

наблюдаемых (1.65) или (1.66) не образуют замкнутую алгебру Пуассона. Действительно, в случае нормального упорядочения в соответствии с (1.63) мы имеем следующее разложение структурных констант скобок Пуассона:

$$\{I_{kl}, I_{k'l'}\} = (kl' - k'l)I_{k+k'-1, l+l'-1} + g \cdot \{\text{члены более низкого порядка}\}.$$

Здесь, после нормального переупорядочения остаются только строки, содержащие не более чем $l + l' - 2$ копий Q и $k + k' - 2$ копий P . Помимо I_{ij} эти упорядоченные члены содержат также полиномы по $\langle v|P^k Q^l|v\rangle$, которые вместе с I_{ij} образуют замкнутую нелинейную алгебру [16].

Аналогичная структура имеет место для скобки между наблюдаемыми, упорядоченными по Вейлю:

$$\{\psi_{s_1 m_1}, \psi_{s_2 m_2}\} = 2(s_2 m_1 - s_1 m_2)\psi_{s_1+s_2-1, m_1+m_2} + g \cdot \{\text{квантовые поправки}\}, \quad (1.68)$$

где младшие члены, как правило, не симметризованы. Так как $sl(2, R)$ алгебра действует аддитивно на скобки Пуассона, мы получаем аналог правила сумм углового момента для $sl(2, R)$ представлений с конформными спинами s_1 и s_2 . Получается неассоциативное косое произведение, в котором выживают только симметричные представления:

$$(s_1) \wedge (s_2) = (s_1 + s_2 - 1) \oplus (s_1 + s_2 - 3) \oplus \dots = \bigoplus_{k=0}^{\lfloor \frac{s_1+s_2-1}{2} \rfloor} (s_1 + s_2 - 1 - 2k). \quad (1.69)$$

На самом деле, эти свойства Вейль-упорядоченных величин вытекают из симметризованного аналога соотношения

$$\left\{ O^{(\sigma_1 \dots \sigma_{2s})}, O^{(\sigma'_1 \dots \sigma'_{2s'})} \right\} = \sum_{\sigma_i, \sigma'_j} \epsilon_{\sigma_i \sigma'_j} O^{(\sigma_1 \dots \widehat{\sigma_i} \dots \sigma_{2s})} (\sigma'_1 \dots \widehat{\sigma'_j} \dots \sigma'_{2s'}). \quad (1.70)$$

Правая часть этого уравнения имеет структуру тензорного произведения двух $sl(2, R)$ мультиплетов с конформными спинами $s - \frac{1}{2}$ и $s' - \frac{1}{2}$. Свертка с $\epsilon_{\sigma_1 \sigma'_1} \dots \epsilon_{\sigma_k \sigma'_k}$ с последующей симметризацией по остальным спином проецирует ее на представление со спином $s + s' - k - 1$. Так как левая часть (1.70) антисимметрична при

перестановке двух множеств спиновых индексов $\{\sigma\}$ и $\{\sigma'\}$, остаются лишь четные значения k , что доказывает (1.69). Используя (1.67) и разложение Клебша-Гордана, можно получить из (1.70) следующие скобки между обычными состояниями с определенной проекцией спина:

$$\begin{aligned} \{\psi_{sm}, \psi_{s'm'}\} = 2\sqrt{ss'} \sum_{k=0}^{\left[\frac{s_1+s_2-1}{2}\right]} & \left(\sqrt{(s+m)(s'-m')} C_{s-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}, s'-\frac{1}{2}m'+\frac{1}{2}}^{s+s'-2k-1, m+m'} \right. \\ & \left. - \sqrt{(s-m)(s'+m')} C_{s-\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}, s'-\frac{1}{2}m'-\frac{1}{2}}^{s+s'-2k-1, m+m'} \right) \psi_{s+s'-2k-1, m+m'}. \end{aligned} \quad (1.71)$$

Можно заменить все строки (1.61) в выражении для сферического инварианта их симметризованными аналогами (1.67). В дуальном описании предыдущего раздела эта замена эквивалентна использованию симметризованных инвариантных тензоров

$$d_{a_1 \dots a_n}^{\text{sym}} = \frac{1}{n!} \sum_{p \in S_n} d_{a_{p_1} \dots a_{p_n}}.$$

Конечно, новый набор инвариантов отличается от старого. Несмотря на то, что соответствующие выражения оказываются более громоздкими, вид диаграмм здесь проще. В силу симметрии, все спины, которые образуют данный мультиплет, эквивалентны. Таким образом, более естественно использовать одну вершину для мультиплета, как в предыдущем разделе, где обсуждался предел свободных частиц.

Соотношение (1.51), изображенное на рис.1.4, является известным соотношением пересечения валентных связей для четырех спинов с $s = 1/2$, сгруппированных в три синглетные состояния. В терминологии теории спиновых систем, описанные состояния образуют базис в пространстве спиновых синглетных состояний, образованных валентными связями. Он переполнен, т. е. линейно зависим. Независимыми будут состояния Темперли и Либа, в которых связи не пересекаются. Точнее, если расположить все мультиплеты вдоль одной прямой или окружности, и любые парные связи допускаются, если только они согласованы со спином мультиплета (из точки со спином s выходит ровно $2s$ линий) и нет пересечений. Базис

Темперли-Либа является неортогональным даже для $su(2)$ спинов. Все состояния, представленные на Рис. 1.11 и 1.12 являются элементами базиса Темперли-Либа. После $SU(N)$ редукции построенные инварианты образуют функциональное представление для $SL(2, R)$ синглетных состояний, аналогичное более простому, рассмотренному в работе [136] для группы $SU(2)$ и спина $s = 1/2$.

1.5 Инварианты произвольной сферической механики

1.5.1 Сферическая механика

В этом разделе мы свяжем интеграл движения конформной механики (1.4) с некоторой системой дифференциальных уравнений в фазовом пространстве соответствующей сферической системы.

Любая функция f на фазовом пространстве определяет гамильтоново векторное поле, действующее посредством скобки Пуассона $\hat{f} = \{f, \cdot\}$. Гамильтоновы векторные поля, порождаемые генераторами H, D, K (1.4) и элементом Казимира (1.3) имеют вид:

$$\hat{H} = p_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\mathcal{I}}{r^3} \frac{\partial}{\partial p_r} + \frac{\hat{\mathcal{I}}}{2r^2}, \quad \hat{K} = -r \frac{\partial}{\partial p_r}, \quad \hat{D} = r \frac{\partial}{\partial r} - p_r \frac{\partial}{\partial p_r}, \quad (1.72)$$

$$\hat{\mathcal{I}} = 4H\hat{K} + 4K\hat{H} - 2D\hat{D}. \quad (1.73)$$

Поскольку задание $f \mapsto \hat{f}$ является гомоморфизмом алгебры Ли, векторные поля $\hat{H}, \hat{K}, \hat{D}$ удовлетворяют конформной алгебре (1.2), а векторное поле элемента Казимира $\hat{\mathcal{I}}$ коммутирует с ними.

Любой интеграл движения является младшим вектором конформной алгебры (1.2), так как он зануляет гамильтониан. Без каких-либо ограничений, его можно выбрать с определенной конформной размерностью (конформным спином):

$$\hat{H}I_s = 0, \quad \hat{D}I_s = -2sI_s. \quad (1.74)$$

Заметим, что любая конформная механика, описывающая тождественные частицы, имеющая дополнительный кубический по импульсам интеграл движения (т.е. с $s = 3/2$), коммутирующий с полным импульсом, приводит к рациональной модели Калоджеро [26].

В дальнейшем будем рассматривать только неотрицательные целые и полуцелые значения спина s , так что I_s порождает конечномерное (неунитарное) представление алгебры $sl(2, R)$. Интегралы движения модели Калоджеро и ее рациональных обобщений удовлетворяют этому условию.

Наша задача – представление интегралов движения сферического гамильтониана (1.3) через интегралы базового гамильтониана конформной механики. Используя (1.4), (1.72) и (1.73), легко видеть, что условие сохранения (1.74) эквивалентно уравнению

$$(\hat{\mathcal{I}} - \hat{M}) I_s(p_r, r, u) = 0, \quad \text{где} \quad \hat{M} = 2(\hat{S}_- - \mathcal{I}\hat{S}_+). \quad (1.75)$$

Здесь одномерные векторные поля $\hat{S}_\pm$ и $\hat{S}_z$ задаются выражениями:

$$\hat{S}_+ = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial p_r}, \quad \hat{S}_- = -p_r r^2 \frac{\partial}{\partial r}, \quad \hat{S}_z = -\frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + p_r \frac{\partial}{\partial p_r} \right). \quad (1.76)$$

Интересно, что они составляют алгебру $so(3)$:

$$[\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2\hat{S}_z, \quad [\hat{S}_z, \hat{S}_\pm] = \pm\hat{S}_\pm. \quad (1.77)$$

Заметим, что поле $\hat{S}_+$ гамильтоново и порождается гамильтонианом $S_+ = -\log(r)$, в то время как два других векторных поля не являются гамильтоновыми.

Интеграл (1.74) можно представить в виде суммы слагаемых с разделенными радиальными и угловыми координатами и импульсами:

$$I_s(p_r, r, u) = \sum_{m=-s}^s f_{s,m}(u) R_{s,m}(p_r, r), \quad R_{s,m}(p_r, r) = \sqrt{\binom{2s}{s+m}} \frac{p_r^{s-m}}{r^{s+m}}. \quad (1.78)$$

Радиальные функции $R_{s,m}$ образуют спин- s представление ($s = 0, \frac{1}{2}, \dots$) алгебры $so(3)$:

$$\hat{S}_\pm R_{s,m} = \sqrt{(s \mp m)(s \pm m + 1)} R_{s,m \pm 1}, \quad \hat{S}_z R_{s,m} = m R_{s,m}. \quad (1.79)$$

Следовательно, $\hat{\mathcal{I}}$ действует нетривиально только на угловые, а $\hat{S}_a$ – на радиальные переменные. Используя (1.78), можно переместить последнее действие на угловые

переменные транспонированием $so(3)$ матриц. В результате действие $\hat{\mathcal{I}}$ на спин- s состояния $f_{s,m}$ задается выражением

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{I}}f_{s,m} &= \sum_{m'} M_{mm'} f_{s,m'} \\ &= 2\left(\sqrt{(s-m)(s+m+1)}f_{s,m+1} - \mathcal{I}\sqrt{(s-m+1)(s+m)}f_{s,m-1}\right).\end{aligned}\tag{1.80}$$

Это – система из $2s + 1$ линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка для угловых функций $f_{s,m}(u)$. Коэффициенты зависят только от $\mathcal{I}$, который коммутирует с дифференциальным оператором, и поэтому они могут здесь рассматриваться как константы. Отметим, что все угловые коэффициенты должны удовлетворять эквивалентному данной системе линейному однородному дифференциальному уравнению $(2s+1)$ -го порядка:

$$\text{Det}(\hat{\mathcal{I}} - M)f_{s,m} = 0.\tag{1.81}$$

Действительно, используя (1.80), можно рекуррентным образом представить каждую функцию $f_{s,m}$ как полином $(s \pm m)$ -го порядка по $\hat{\mathcal{I}}$, действующий на функции $f_{s,\mp s}$. Диагонализация матрицы M расщепляет систему (1.80) на независимые уравнения, определяющие собственные значения и вектора векторного поля $\hat{\mathcal{I}}$.

Рассмотрим теперь некоторые следствия из соотношения (1.80). Используя один единственный интеграл, можно построить другие интегралы с тем же значением конформного спина последовательным применением векторного поля, порожденного сферическим гамильтонианом:

$$I_s \xrightarrow{\hat{\mathcal{I}}} I_s^{(1)} \xrightarrow{\hat{\mathcal{I}}} I_s^{(2)} \xrightarrow{\hat{\mathcal{I}}} \dots \xrightarrow{\hat{\mathcal{I}}} I_s^{(k)} \xrightarrow{\hat{\mathcal{I}}} \dots, \quad I_s^{(k)} := \hat{\mathcal{I}}^k I_s.\tag{1.82}$$

В общем случае члены этой последовательности не находятся в инволюции друг с другом. Точное количество функционально независимых интегралов зависит от I_s , а также от конкретной реализации конформной механики. Самое большее, первые $2s+1$ интеграла являются независимыми, а остальные выражаются через них

линейно с $\mathcal{I}$ -зависимыми коэффициентами. В самом деле, рассмотрим вектор

$$w = (I_s^{(1)}, I_s^{(2)}, \dots, I_s^{(2s+1)}),$$

образованный первыми $2s+1$ элементами построенной цепочки. Гамильтоново действие $\hat{\mathcal{I}}$ на этот вектор эквивалентно действию квадратной матрицы с $\mathcal{I}$ -зависимыми элементами. Старшие же степени любой матрицы размерности $n \times n$, действующие на один и тот же вектор, выражаются через действия первых k степеней.

1.5.2 Константы движения сферической механики

В этом разделе константы движения сферической механики строятся исходя из констант исходной конформной механики, используя представления группы $SO(3)$.

Любой интеграл I_s исходного гамильтониана задается его коэффициентами в разложении (1.78). Соответствующее условие сохранения (1.75) (1.80), или (1.81) расщепляется на независимые уравнения после диагонализации матрицы M :

$$\hat{M} = 4\sqrt{-\mathcal{I}} \hat{U} \hat{S}_z \hat{U}^{-1}, \quad \hat{U} = (-\mathcal{I})^{\frac{1}{2}\hat{S}_z} e^{-\frac{i\pi}{2}\hat{S}_y}, \quad \hat{S}_y = \frac{1}{2i}(\hat{S}_+ - \hat{S}_-). \quad (1.83)$$

Таким образом, с точностью до множителя, зависящего от $\mathcal{I}$, векторное поле $\hat{M}$ эквивалентно действию оператора компоненты z спина.

Оператор $\exp(-\frac{i\pi}{2}\hat{S}_y)$ отображает $\hat{S}_z$ на $\hat{S}_x$. Последний затем преобразуется к $\hat{M}$ с помощью $(-I)^{\hat{S}_z/2}$, который рассматривается как формальный степенной ряд. Вместе с коэффициентом $i\sqrt{\mathcal{I}}$ он содержит квадратные корни от $\mathcal{I}$. Когда потенциал положителен, как это имеет место в модели Калоджеро, сферическая часть строго положительна, и оператор (1.83) является сложным, но однозначным. В любом случае, в окончательном выражении констант движения все квадратные корни исчезают.

Определим повернутый базис алгебры (1.77), который формируется из соб-

ственных состояний оператора $\hat{M}$. Используя (1.83), получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{s,m} &= (\hat{U}R)_{s,m} = \sum_{m'} U_{m'm} R_{s,m'}, & U_{m'm} &= d_{m'm}^s(\pi/2)(-\mathcal{I})^{\frac{m'}{2}}, \\ \hat{M}\tilde{R}_{s,m} &= m\tilde{R}_{s,m},\end{aligned}\tag{1.84}$$

где $d_{m'm}^s(\beta)$ – малая d -матрица Вигнера, которая описывает вращение вокруг оси y в обычном спин- s представлении (1.79). Явные выражения приведены в приложении, см. (1.132), (1.133), (1.135). Там же приводятся некоторые формулы и соотношения между элементами d -матрицы, которые используются нами ниже. Заметим, что функции $\tilde{R}_{s,m}$ теперь зависят от угловых переменных только посредством $\mathcal{I}$. Интеграл (1.78) исходного гамильтониана выражается через повернутые функции:

$$I_s(p_r, r, u) = \sum_{m=-s}^s \tilde{f}_{s,m}(u) \tilde{R}_{s,m}(p_r, r, \mathcal{I}(u)).\tag{1.85}$$

Новые коэффициенты выражаются через старые с помощью обратного преобразования [сравните (1.78) с (1.85) и (1.84)]:

$$\tilde{f}_{s,m} = \sum_{m'} U_{mm'}^{-1} f_{s,m'} = \sum_{m'} (-\mathcal{I})^{-\frac{m'}{2}} d_{m'm}^s(\pi/2) f_{s,m'}.\tag{1.86}$$

Во втором уравнении мы применили условия ортогональности d -матрицы [первое уравнение в (1.134)]. Подставляя разложение (1.85) в (1.75) и используя уравнение собственного значения и собственного вектора (1.85), мы приходим к аналогичному уравнению для векторного поля $\hat{\mathcal{I}}$ и угловых коэффициентов:

$$\hat{\mathcal{I}}\tilde{f}_{s,m}(u) = 4m\sqrt{-\mathcal{I}(u)}\tilde{f}_{s,m}(u).\tag{1.87}$$

Это задает формальное решение системы (1.80). Для систем с положительной сферической частью собственное значение является хорошо определенной чисто мнимой функцией, а коэффициенты, задаваемое сферическим гамильтонианом, совершают со временем гармоническое колебание с частотой, пропорциональной m :

$$\tilde{f}_{s,m}(t) = e^{i\omega_m(t-t_0)}\tilde{f}_{s,m}(t_0) \quad \text{где} \quad \omega_m = 4m\sqrt{\mathcal{I}}.\tag{1.88}$$

Различные комбинации этих величин приводят к интегралам движения сферической механики. В частности, для целого спина s , коэффициент нулевой частоты $\tilde{f}_{s,0}(u)$ является целочисленным. Используя явное выражение для d -матрицы Вигнера в этом случае (1.136), его можно выразить через исходные коэффициенты:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_s(u) &= \mathcal{I}(u)^{\frac{s}{2}} \tilde{f}_{s,0}(u) = \sum_{m=-s}^s \frac{(s+m-1)!!(s-m-1)!!}{\sqrt{(2s)!}} \delta_{s-m,2\mathbb{Z}} \mathcal{I}(u)^{\frac{s-m}{2}} f_{s,m}(u) \\ &= \sum_{\ell=0}^s \frac{(2\ell-1)!!(2s-2\ell-1)!!}{\sqrt{(2s)!}} \mathcal{I}(u)^\ell f_{s,2\ell-s}(u).\end{aligned}\tag{1.89}$$

Здесь $\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел, так что $\delta_{k,2\mathbb{Z}} = 1$ для четных значений k и зануляется для нечетных. Дополнительный $\mathcal{I}$ -зависимый множитель перед угловым коэффициентом избавляет нас от дробных степеней по $\mathcal{I}$, оставляя только целые степени в окончательном выражении.

Для целочисленных значений s этот же интеграл можно получить и из дифференциального уравнения (1.81). Действительно, благодаря (1.83) или (1.87), соответствующий дифференциальный оператор (1.81) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\text{Det}(\hat{\mathcal{I}} - M) &= \prod_{m=-s}^s (\hat{\mathcal{I}} - 4m\sqrt{-\mathcal{I}}) =: \begin{cases} \hat{\mathcal{I}}\hat{\Delta}_s & \text{for } s \in \mathbb{Z}, \\ \hat{\Delta}_s & \text{for } s \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}, \end{cases} \\ \hat{\Delta}_s &= \prod_{0 < m \leq s} (\hat{\mathcal{I}}^2 + 16m^2\mathcal{I}).\end{aligned}\tag{1.90}$$

Поэтому при целочисленном значении спина выражение (1.81) сводится к

$$\hat{\mathcal{I}}\hat{\Delta}_s f_{s,m} \equiv \prod_{m=1}^s (M^2 + 16m^2\mathcal{I}) f_{s,m} = 0,\tag{1.91}$$

откуда следует, что $\hat{\Delta}_s f_{s,m}$ является интегралом движения для $\mathcal{I}$. Оператор $\hat{\Delta}_s$ зануляет все собственные функции $\tilde{f}_{s,m}$, кроме одной:

$$\hat{\Delta}_s \tilde{f}_{s,m} = \delta_{m0} (s!)^2 (16\mathcal{I})^s \tilde{f}_{s,m}.\tag{1.92}$$

Поэтому, этот интеграл должен быть пропорционален (1.89). В этом легко убедиться, если применить $\hat{\Delta}_s$ к обоим частям уравнения, обратного к (1.86), и ис-

пользовать (1.84), (1.89), (1.136):

$$\begin{aligned}\hat{\Delta}_s f_{s,m} &= U_{m0} \hat{\Delta}_s \tilde{f}_{s,0} = \delta_{s-m,2\mathbb{Z}} c_{s,m} \mathcal{I}^{\frac{s+m}{2}} \mathcal{J}_s, \\ c_{s,m} &= (-8i)^s s! \left(\frac{s}{\frac{s+m}{2}} \right) \sqrt{(s-m)!(s+m)!}.\end{aligned}\tag{1.93}$$

Как построить интеграл для сферической системы $\mathcal{I}$ исходя из интеграла для H с полуцелым конформным спином? Соответствующее представление не имеет $m = 0$ состояния, но такое состояние имеется в интеграле $I_{2s} = I_s^2$, который имеет целочисленное значение спина, равное $2s$. В общем случае, интегралы $\mathcal{I}$ строятся также с помощью билинейных комбинаций $f_{s,m}(u)$ с противоположными значениями проекции спина. На самом деле, любое состояние

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_s^m &= (-\mathcal{I})^s \tilde{f}_{s,m} \tilde{f}_{s,-m} \\ &= \sum_{m',m''} i^{4s+m''-m'} d_{m''m}^s(\pi/2) d_{m'm}^s(\pi/2) \mathcal{I}^{s-\frac{m'+m''}{2}} f_{s,m'} f_{s,m''} \\ &= \sum_{m',m''} \delta_{m''-m',2\mathbb{Z}} (-1)^{2s+\frac{m''-m'}{2}} d_{m''m}^s(\pi/2) d_{m'm}^s(\pi/2) \mathcal{I}^{s-\frac{m'+m''}{2}} f_{s,m'} f_{s,m''}\end{aligned}\tag{1.94}$$

является интегралом $\mathcal{I}$. В первом уравнении мы использовали свойства симметрии (1.137) для d -матрицы. Кронекеровское дельта появляется после симметризации по двум индексам суммирования в первой двойной сумме с помощью

$$\frac{1}{2}(i^{m''-m'} + i^{m'-m''}) = i^{m''-m'} \frac{1}{2}(1 + (-1)^{m'-m''}) = i^{m''-m'} \delta_{m''-m',2\mathbb{Z}}.\tag{1.95}$$

Следовательно, постоянная движения $\mathcal{J}_s^m$ сферической системы является вещественным многочленом порядка $2s$ от $\mathcal{I}$.

Существует простая интерпретация построенных интегралов через теорию представлений. Возьмем некоторый набор угловых функций, удовлетворяющих (1.75) или (1.80). Это означает, что соответствующая величина I_s (1.78) является интегралом H . Затем, используя свойства тензорных произведений $SO(3)$ представлений, можно построить другие наборы угловых функций:

$$f_{S,m}(u) = \sum_{m_1+m_2=m} C_{s,m_1,s,m_2}^{S,m} f_{s,m_1}(u) f_{s,m_2}(u), \quad S = 2s, 2s-2, \dots, \tag{1.96}$$

которые удовлетворяют аналогичному уравнению. Мультиплеты с нечетными $S-2s$ отсутствуют в симметричном тензорном произведении ввиду перестановочной симметрии коэффициентов Клебша-Гордана (1.140). Из угловых функций (1.96) можно составить новые интегралы исходного гамильтониана:

$$I'_S = \sum_m f_{S,m} R_{S,m}, \quad S = 2s, 2s-2, \dots \quad (1.97)$$

Каждый из них соответствует симметричному мультиплету в тензорном произведении двух спин- s мультиплетов. Заметим, что первый интеграл из этого набора просто совпадает с квадратом исходного интеграла, $I'_{2s} = I_s^2$, как это можно проверить с помощью (1.139). Поскольку S является целым числом, соответствующий мультиплет содержит состояние с $m = 0$, которое является интегралом движения сферической механики:

$$\mathcal{F}_s^S(u) = \sum_m C_{s,m,s,-m}^{S,0} \mathcal{J}_m^s(u). \quad (1.98)$$

Нежелательные дробные степени от $\mathcal{I}$ сокращаются. Эти два набора интегралов, конечно же, эквивалентны.

Аналогичная процедура смешивания может быть применена к двум различным интегралам I_{s_1} и I_{s_2} с целым значением s_1-s_2 . Полученные интегралы определяются целым набором $2s_{\min}+1$ с разными моментами, удовлетворяющими правилу сумм.

Эта конструкция напрямую обобщается и на полилинейные формы из угловых функций. Выражение (1.94) обобщается следующим образом:

$$\mathcal{J}_{s_1 \dots s_k}^{m_1 \dots m_k}(u) = \mathcal{I}(u)^{\frac{1}{2} \sum_{\ell} s_{\ell}} \prod_{\ell=1}^k \tilde{f}_{s_{\ell}, m_{\ell}}(u), \quad \sum_{\ell=1}^k m_{\ell} = 0, \quad (1.99)$$

где последнее соотношение означает, что суммарный спин $\sum s_{\ell}$ должен быть целым. Эти наблюдаемые могут быть объединены в единый мультиплет со спином S посредством $(k-1)$ -кратного применения разложения Клебша-Гордана. Окончательный набор наблюдаемых $\tilde{f}_{S,m}$ образует интеграл исходной конформной механики, а $m = 0$ элемент соответствует интегралу сферической механики.

До сих пор мы рассматривали только произведения сферических функций. В целом же, можно также использовать их отношения, где числитель и знаменатель имеют одинаковое значение проекции спина, как, например, в $\tilde{f}_{s_1,m}/\tilde{f}_{s_2,m}$. Конечно, это влечет за собой появление особенностей, которые могут создать проблемы при квантования.

Следует отметить, что различные угловые интегралы движения, построенные здесь, не являются независимыми, некоторые из них могут также зануляться. Кроме того, совместимость (инволютивность) интегралов движения для H вовсе не означает еще совместимости соответствующих интегралов для $\mathcal{I}$, как это видно из (1.94).

Приведем теперь простейшие примеры, иллюстрирующие описанный выше метод построения интегралов сферической механики.

Прежде всего заметим, что существуют две билинейные сохраняющиеся величины (1.94) и (1.98), которые имеют довольно простые угловые коэффициенты. Первым из них является канонический синглет, который сохраняется при поворотах:

$$\mathcal{F}_s^0(u) \sim \sum_m (-1)^{s-m} \tilde{f}_{s,m} \tilde{f}_{s,-m} = \sum_m (-1)^{s-m} f_{s,m} f_{s,-m}. \quad (1.100)$$

Вторая задается простой суперпозицией состояний (1.94), которая упрощается в силу ортогональности d -матриц:

$$\sum_m \mathcal{J}_s^m \sim \sum_m \mathcal{I}^{s-m} f_{s,m}^2. \quad (1.101)$$

Для интеграла I_s с конформным спином $s=\frac{1}{2}$, общая формула (1.94) сводится к (с точностью до нормировочного множителя),

$$\mathcal{J}_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sim \mathcal{I} f_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}^2 + f_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}^2. \quad (1.102)$$

Рассмотрим теперь интеграл I_s . Соответствующий линейный интеграл от $\mathcal{I}$ имеет вид (см. (1.89))

$$\mathcal{J}_1 \sim \mathcal{I} f_{1,1} + f_{1,-1}. \quad (1.103)$$

Кроме того, есть два квадратичных интеграла (1.94), один из которых $(\mathcal{J}_{s=1}^{m=0})$ представляет собой квадрат вышеприведенного интеграла, а другой может быть идентифицирован либо с (1.100), либо с (1.101). Гамильтониан может рассматриваться как частный случай: для $I_1 = H$, коэффициент f_{10} исчезает в то время как другие становятся постоянными, так что единственный сферический инвариант, извлекаемый из конформной механики, соответствует сферическому гамильтониану.

Первый нетривиальный случай соответствует следующему значению конформного спина $s = \frac{3}{2}$, когда отсутствует линейный, но есть два независимых квадратичных интеграла. Самый простой выбор для них – это две функции (1.100) и (1.101).

1.5.3 Четырехчастичная модель Калоджеро

В этом разделе к четырехчастичной модели Калоджеро с редуцированным центром масс применяется общий метод построения полного набора интегралов движения для сферической механики, разработанный в предыдущем разделе. В нашем случае она описывает частицы на двумерной сфере, взаимодействующие по правилу осциллятора Хиггса с центрами сил, расположенных в вершинах кубооктаэдра (см. рис. 1.2). Эта система описывалась в начале данной главы.

В предыдущем разделе были приведены интегралы Лиувилля I_k для системы Калоджеро (1.1), которые являются многочленами k -го порядка от импульсов (1.21), (1.22). Их конформный спин равен $s = k/2$. Во избежание новых обозначений, просто переобозначим индекс в (1.21):

$$I_k \rightarrow I_{k/2} = I_s$$

Следовательно, $I_{\frac{1}{2}} = \sum_i p_i$, $I_1 = H$, а наблюдаемые

$$I_s^{(1)} = \hat{\mathcal{I}} I_s \quad \text{при} \quad s \neq 1 \quad (1.104)$$

совпадают с с дополнительными $N - 1$ интегралами Войцеховского [88]. Как было отмечено выше, вместе с интегралами Лиувилля они образуют полный набор функционально независимых интегралов движения, что означает, что система является максимально суперинтегрируемой [208].

Вспомним вид гамильтониана с исключенным центром масс в сферических координатах (1.17). В соответствии с (1.21) and (1.22), базовый гамильтониан Калоджеро (1.16) имеет два Лиувиллевских интеграла движения конформной размерности $s = 3, 4$, которые задаются выражениями

$$\begin{aligned} I_{\frac{3}{2}} = \text{Tr}(L^3) &= \sum_{i=1}^4 p_i^3 + \dots = 3\tilde{p}_1\tilde{p}_2\tilde{p}_3 + \dots \\ &= \frac{3}{2}p_r^3 \cos \theta \sin^2 \theta \sin 2\varphi + \dots, \end{aligned} \quad (1.105)$$

$$\begin{aligned} I_2 = \text{Tr}(L^4) &= \sum_{i=1}^4 p_i^4 + \dots = \frac{1}{4}(\tilde{p}_1^4 + \tilde{p}_2^4 + \tilde{p}_3^4) + \frac{3}{2}(\tilde{p}_1^2\tilde{p}_1^2 + \tilde{p}_1^2\tilde{p}_3^2 + \tilde{p}_2^2\tilde{p}_3^2) + \dots \\ &= \frac{1}{4}p_r^4 (\sin^2 2\theta + \sin^4 \theta \sin^2 2\varphi + 1) + \dots. \end{aligned} \quad (1.106)$$

Здесь выписаны только члены высшего порядка по радиальному импульсу. Сравнением (1.105) и (1.106) с (1.78), определяются коэффициенты одночленов p_r^{2s} , которые равны сферическим функциям $f_{s,-s}$:

$$f_{\frac{3}{2}}(\theta, \varphi) = \frac{3}{2} \cos \theta \sin^2 \theta \sin 2\varphi, \quad f_2(\theta, \varphi) = \frac{1}{4} (\sin^2 2\theta + \sin^4 \theta \sin^2 2\varphi). \quad (1.107)$$

Мы использовали для удобства короткое обозначение

$$f_s(\theta, \varphi) := f_{s,-s}(\theta, \varphi). \quad (1.108)$$

Интегралы Лиувилля (1.105) и (1.106) дополняются двумя дополнительными интегралами $I_{\frac{3}{2}}^{(1)}$ и $I_2^{(1)}$ (1.104), чьи ведущие коэффициенты (см. (1.104)) равны

$$g_{\frac{3}{2}} = \hat{\mathcal{I}} f_{\frac{3}{2}}, \quad g_2 = \hat{\mathcal{I}} f_2. \quad (1.109)$$

Заметим, что f_s зависит только от углов, а g_s линейны по импульсам. Вместе с гамильтонианом (1.16) получаем полный набор $\{H, I_{\frac{3}{2}}, I_{\frac{3}{2}}^{(1)}, I_2, I_2^{(1)}\}$ пяти независимых интегралов.

Для того, чтобы получить скобки Пуассона, вычислим сначала коммутаторы между соответствующими коэффициентами:

$$\{f_{\frac{3}{2}}, g_{\frac{3}{2}}\} = 18(f_{\frac{3}{2}}^2 - f_2), \quad \{f_2, g_2\} = 8(4f_2^2 - \frac{1}{3}f_{\frac{3}{2}}^2 - f_2), \quad \{f_{\frac{3}{2}}, f_2\} = 0,$$

$$\{f_{\frac{3}{2}}, g_2\} = \{f_2, g_{\frac{3}{2}}\} = 8f_{\frac{3}{2}}(3f_2 - 1), \quad \{g_{\frac{3}{2}}, g_2\} = 4(2g_{\frac{3}{2}}f_2 - 3f_{\frac{3}{2}}g_2).$$

Отображение $I_s \rightarrow f_s$ является гомоморфизмом алгебры Пуассона [88]. Отсюда немедленно получаем аналогичные соотношения для констант движения, вставив степени $2H$ для того, чтобы сбалансировать конформные спины по обе стороны уравнения (коэффициент для гамильтониана (1.16) является постоянной: $f_1 = \frac{1}{2}$).

Таким образом, нетривиальные скобки Пуассона равны

$$\{I_{\frac{3}{2}}, I_{\frac{3}{2}}^{(1)}\} = 18(I_{\frac{3}{2}}^2 - 2I_2H), \quad \{I_2, I_2^{(1)}\} = 8(4I_2^2 - \frac{2}{3}I_{\frac{3}{2}}^2H - 4I_2H^2),$$

$$\{I_{\frac{3}{2}}, I_2^{(1)}\} = \{I_2, I_{\frac{3}{2}}^{(1)}\} = 8I_{\frac{3}{2}}(3I_2 - 4H^2), \quad \{I_{\frac{3}{2}}^{(1)}, I_2^{(1)}\} = 4(2I_{\frac{3}{2}}^{(1)}I_2 - 3I_{\frac{3}{2}}I_2^{(1)}).$$

Мы получили конкретную реализацию части квадратичной алгебры [115] (см. [34] для рациональной модели Калоджеро, основанной на произвольной корневой системе).

Выведем теперь полный набор функционально независимых интегралов движения сферической механики четырехчастичной модели Калоджеро. Второе выражение в (1.90) немедленно выдает сферический инвариант, связанный с (1.106):

$$\mathcal{J}_2 = -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{256}\hat{\mathcal{I}}^4 + \frac{5}{16}\mathcal{I}\hat{\mathcal{I}}^2 + 4\mathcal{I}^2\right)f_2. \quad (1.110)$$

Его явный вид, который вычисляется с помощью (1.17) и (1.107), довольно сложен:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} & \left[\frac{1}{16}(3\cos 4\varphi - 11)p_\theta^4 - \frac{3}{4}\cot\theta\sin 4\varphi p_\theta^3 p_\varphi \right. \\ & - \left(\frac{11+9\cos 4\varphi}{8\sin^2\theta} + \frac{9}{4}\sin^2 2\varphi \right) p_\theta^2 p_\varphi^2 + \frac{3}{4}\cot^3\theta\sin 4\varphi p_\theta p_\varphi^3 \\ & \left. + \frac{3\cos^4\theta\cos 4\varphi + 21\sin^4\theta - 18\sin^2\theta - 11}{16\sin^4\theta} p_\varphi^4 \right] \\ & + g^2 K_1(\theta, \varphi) p_\theta^2 + g^2 K_2(\theta, \varphi) p_\theta p_\varphi + g^2 K_3(\theta, \varphi) p_\varphi^2 + g^4 K_4(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.111)$$

где вид функций $K_1(\theta, \varphi)$, $K_2(\theta, \varphi)$, $K_3(\theta, \varphi)$, $K_4(\theta, \varphi)$ приведен в нашей работе [80].

Используя систему уравнений (1.80), можно выразить старшие коэффициенты $f_{\frac{3}{2},m}$ через младшие:

$$f_{\frac{3}{2},-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\hat{\mathcal{I}}f_{\frac{3}{2}}, \quad f_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{8\sqrt{3}}\hat{\mathcal{I}}^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{I}\right)f_{\frac{3}{2}}, \quad f_{\frac{3}{2},\frac{3}{2}} = \left(\frac{1}{48}\hat{\mathcal{I}}^2 + \frac{7}{12}\mathcal{I}\right)\hat{\mathcal{I}}f_{\frac{3}{2}}. \quad (1.112)$$

Затем из (1.17) и (1.107) выводятся сферические интегралы движения (1.94), связанные с (1.105), а именно $\mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$ и $\mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}$. Их явное выражение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} = & -\frac{3}{32}\sin^2 2\varphi p_{\theta}^6 - \frac{3}{16}\cot\theta \sin 4\varphi p_{\theta}^5 p_{\varphi} \\ & - \frac{3}{128\sin^2\theta} (6\cos^2\theta + (13 - 3\cos 2\theta)\cos 4\varphi) p_{\theta}^4 p_{\varphi}^2 + \frac{3}{2}\cot\theta \sin 4\varphi p_{\theta}^3 p_{\varphi}^3 \\ & - \frac{3}{128\sin^4\theta} (22\sin^4\theta - (43 - 53\cos 2\theta)\cos 4\varphi \cos^2\theta + 6\cos 2\theta) p_{\theta}^2 p_{\varphi}^4 \\ & - \frac{3}{32\sin^5\theta} (7 - 9\cos 2\theta)\cos^3\theta \sin 4\varphi p_{\theta} p_{\varphi}^5 \\ & - \frac{3\cos^2\theta}{128\sin^6\theta} ((5 + 11\cos 4\varphi)\sin^2\theta + (2 - 9\cos 2\theta\sin^2\theta)(1 - \cos 4\varphi)) p_{\varphi}^6 \\ & + \text{члены более низкого порядка по } p_{\theta} \text{ и } p_{\varphi}, \end{aligned} \quad (1.113)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = & -\frac{9}{32}\sin^2 2\varphi p_{\theta}^6 - \frac{9}{16}\cot\theta \sin 4\varphi p_{\theta}^5 p_{\varphi} - \frac{9}{64} \left(\frac{5\cos 4\varphi + 3}{\sin^2\theta} + 10\sin^2 2\varphi \right) p_{\theta}^4 p_{\varphi}^2 \\ & - \frac{9}{64\sin^4\theta} (5\cos^4\theta \cos 4\varphi + 10\sin^2\theta - 5\sin^4\theta + 3) p_{\theta}^2 p_{\varphi}^4 \\ & + \frac{9}{16}\cot^5\theta \sin 4\varphi p_{\theta} p_{\varphi}^5 + \frac{9\cos^2\theta}{64\sin^6\theta} (\cos^4\theta \cos 4\varphi - 6\sin^2\theta - \sin^4\theta - 1) p_{\varphi}^6 \\ & + \text{члены более низкого порядка по } p_{\theta} \text{ и } p_{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.114)$$

Очевидно, что $\mathcal{I}$, $\mathcal{J}_2$, $\mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}}$ и $\mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}$ функционально зависимы, так как наш сферическая механика задана на четырехмерном фазовом пространстве. Используя компьютерную программу **Mathematica**, можно проверить следующие алгебраические соотношения:

$$\mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\mathcal{J}_{\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} + 2\sqrt{\frac{2}{3}}\mathcal{J}_2\mathcal{I} + \frac{1}{3}\mathcal{I}^3 + 4g^2\mathcal{I}^2. \quad (1.115)$$

Эта единственная связь между четырьмя константами движения, поскольку (1.113) и (1.114) не находятся в инволюции с (1.111). Даже их свободные части не коммутируют, что легко проверяется. Таким образом, мы нашли три функционально

независимых сферических инварианта. Это подтверждает суперинтегрируемость данной системы.

1.6 Приложения

1.6.1 Генераторы групп $U(N)$ и $SU(N)$

Здесь мы приведем ортогональный базис для эрмитовых матриц, который уважает разложение $u(N) = u(1) \oplus su(N)$. Возьмем

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbf{1} \quad (1.116)$$

в качестве $U(1)$ генератора. Пусть следующие $N - 1$ генераторы образуют $SU(N)$ подалгебру Картана. Выберем их в виде

$$T_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \left(\sum_{i=1}^k E_{ii} - k E_{kk} \right), \quad 1 \leq k \leq N-1. \quad (1.117)$$

Здесь E_{ij} – матрицы с нулевыми элементами, за исключением элемента в i -й строке и j -ом столбце, который равен единице. Оставшиеся T_a задаются недиагональными матрицами

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(E_{jk} + E_{kj}), \quad \frac{i}{\sqrt{2}}(E_{jk} - E_{kj}), \quad j > k. \quad (1.118)$$

Этот базис ортонормирован (1.29) и, в силу (1.116), удовлетворяет

$$\text{tr } T_a = \delta_{a0}. \quad (1.119)$$

Так как базис E_{ij} также ортонормирован, преобразование (1.116), (1.117) диагональных матриц, коэффициенты которой обозначим через R_{lk} , является ортогональным:

$$T_k = \sum_{l=1}^N R_{lk} E_{ll}, \quad \sum_{l=1}^N R_{kl} R_{k'l} = \delta_{kk'}. \quad (1.120)$$

Заметим, что первый индекс в матрице R_{lk} меняется в области $[1, N]$, а второй – в области $[0, N-1]$. Такие обозначения удобны тем, что выделяют координаты центра масс.

После применения редукции по $SU(N)$, диагональные элементы приведенных матриц (1.26) и (1.27) определяют координаты и импульсы модели Калоджеро (1.1). Используя определения (1.116) and (1.117), получим их связь с новыми координатами $Q_i = (QT_i)$ и $P_i = (PT_i)$, которая задается транспонированной к (1.120) матрицей

$$q_l = \sum_{k=0}^{N-1} R_{lk} Q_k, \quad Q_k = \sum_{l=1}^N R_{lk} q_l. \quad (1.121)$$

Используя (1.116) и (1.117), запишем явный вид прямого преобразования координат [104]:

$$\begin{aligned} Q_k &= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}(q_1 + \cdots + q_k - kq_{k+1}), \\ P_k &= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}(p_1 + \cdots + p_k - kp_{k+1}), \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ Q_0 &= \frac{1}{\sqrt{N}}(q_1 + \cdots + q_N), \quad P_0 = \frac{1}{\sqrt{N}}(p_1 + \cdots + p_N). \end{aligned} \quad (1.122)$$

Это обычные координаты Якоби, которые используются в теории рассеяния для исключения центра масс [169]. Здесь они соответствуют $U(1)$ редукции [166]. Центр масс исключается путем наложения условий

$$Q_0 = P_0 = 0. \quad (1.123)$$

Таким образом, кинетический член исходной модели Калоджеро остается неизменным. Потенциал же изначально независим от центра масс, поскольку парное взаимодействие зависит от разности координат. Введем в рассмотрение две системы векторов α_{ij} и β_{ij} , которые переходят друг в друга вращением (1.121):

$$\alpha_{ij,k} = \delta_{ik} - \delta_{jk}, \quad \beta_{ij,k} = \sum_{l=1}^N R_{lk} \alpha_{ij,l} = R_{ik} - R_{jk}, \quad 1 \leq i, j, k+1 \leq N \quad (1.124)$$

Заметим, что α_{ij} задают корни алгебры $su(N)$, которые соответствуют корневым векторам E_{ij} при $i \neq j$. При $i < j$ (1.124) соответствуют положительным корням, а при $i > j$ – отрицательным. Базисом в этой системе служат положительные простые корни α_i , $1 \leq i \leq N-1$, определяемые

$$\alpha_i = \alpha_{ii+1}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_i - \alpha_j, \quad \alpha_i \cdot \alpha_j = 2\delta_{ij} - \delta_{i,j\pm 1}. \quad (1.125)$$

которые определяют подалгебру Картана $su(N)$. Согласно (1.125), простые корни взаимно ортогональны, кроме соседних, которые образуют угол $\pi/3$. Кроме того, все корни $su(N)$ имеют равную норму:

$$|\alpha_{ij}|^2 = |\beta_{ij}|^2 = 2. \quad (1.126)$$

Парное взаимодействие в старых координатах $\mathbf{q}$ выражается через α_{ij} , а в новых $\mathbf{Q}$ – через β_{ij} :

$$q_i - q_j = \alpha_{ij} \cdot \mathbf{q} = \beta_{ij} \cdot \mathbf{Q} \quad (1.127)$$

Окончательные же выражения гамильтониана в новых обозначениях до и после исключения центра масс принимают, соответственно, следующий вид:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} p_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{g^2}{(\alpha_{ij} \cdot \mathbf{q})^2} \quad (1.128)$$

$$H^{\text{red}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} P_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N-1} \frac{g^2}{(\beta_{ij} \cdot \mathbf{Q})^2}. \quad (1.129)$$

В конце приведем также соотношению полноты для всего базиса (1.116), (1.117), (1.118) [алгебра Ли $u(N)$]

$$\sum_{a=0}^{N^2-1} T_{ij}^a T_{kl}^a = \delta_{il} \delta_{jk}. \quad (1.130)$$

и для его бесследовой части (1.117), (1.118) [алгебра Ли $su(N)$]

$$\sum_{a=1}^{N^2-1} T_{ij}^a T_{kl}^a = \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl}. \quad (1.131)$$

1.6.2 Малые d матрицы Вигнера.

Спин- j представление группы вращений, параметризованное (тремя) углами Эйлера, задается D -матрицей Вигнера [207, 199]. Здесь мы рассмотрим только так называемую малую d -матрицу Вигнера, которая описывает вращение вокруг оси y :

$$d_{m'm}^s(\beta) = \langle sm' | \exp(-i\beta S_y) | sm \rangle, \quad (1.132)$$

где $m, m' = -s, \dots, s$ – квантовые числа проекции спина на ось z . Все ее элементы действительны [207]:

$$d_{m'm}^s(\beta) = \sum_t (-1)^{t+m'-m} \frac{\sqrt{(s+m')!(s-m')!(s+m)!(s-m)!}}{(j+m-t)!(m'-m+t)!(j-m'-t)!} \times \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2s+m-m'-2t} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{m'-m+2t}, \quad (1.133)$$

где сумма берется по тем значениям t , для которых аргументы факториалов в знаменателе неотрицательны. Они удовлетворяют соотношению:

$$d_{m'm}^s(\beta) = d_{mm'}^s(-\beta) = (-1)^{m-m'} d_{mm'}^s(\beta) = d_{-m-m'}^s(\beta). \quad (1.134)$$

При $\beta = \pi/2$ приведенное выше выражение упрощается до

$$d_{m'm}^s(\pi/2) = 2^{-s} \sum_t (-1)^{t+m'-m} \frac{\sqrt{(s+m')!(s-m')!(s+m)!(s-m)!}}{(s+m-t)!(m'-m+t)!(s-m'-t)!}. \quad (1.135)$$

Дальнейшие упрощения возникают, когда одно проекция спина зануляется, что возможно при целом спине:

$$\begin{aligned} d_{m0}^s(\pi/2) &= (-1)^{\frac{s+m}{2}} \delta_{s-m, 2\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{(s+m-1)!!(s-m-1)!!}{(s+m)!!(s-m)!!}} \\ d_{0m}^s(\pi/2) &= (-1)^{\frac{s-m}{2}} \delta_{s-m, 2\mathbb{Z}} \sqrt{\frac{(s+m-1)!!(s-m-1)!!}{(s+m)!!(s-m)!!}} \\ d_{00}^s(\pi/2) &= (-1)^{\frac{s}{2}} \delta_{s, 2\mathbb{Z}} \frac{(s-1)!!}{s!!} \end{aligned} \quad (1.136)$$

Множитель $\delta_{s-m, 2\mathbb{Z}}$ исключает нечетные значения $s-m$, при которых матричные элементы равны нулю. При $\beta = \pi/2$, соотношения дополняются выражением:

$$d_{m'm}^s(\pi/2) = (-1)^{s+m'} d_{m'-m}^s(\pi/2) = (-1)^{s-m} d_{-m'm}^s(\pi/2), \quad (1.137)$$

которое получается из $d_{m'm}^s(\pi) = (-1)^{s-m} \delta_{m', -m}$.

1.6.3 Коэффициенты Клебша-Гордана

Клебша-Гордана являются коэффициенты разложения состояния полного спина двух частиц $|SM\rangle$ по состояниям $|s_1 m_1 s_2 m_2\rangle$, образованными собственными состояниями отдельных спинов:

$$C_{s_1, m_1, s_2, m_2}^{S, M} = \langle s_1 m_1 s_2 m_2 | SM \rangle. \quad (1.138)$$

Общее выражение сложно, но в особых случаях оно часто выглядит достаточно просто, как для наибольшего значения полного спина:

$$C_{s_1, m_1, s_2, m_2}^{s_1+s_2, m_1+m_2} = \sqrt{\frac{\binom{2s_1}{s_1-m_1} \binom{2s_2}{s_2-m_2}}{\binom{2s_1+2s_2}{s_1+s_2-m_1-m_2}}}. \quad (1.139)$$

Коэффициенты Клебша-Гордана при перестановке частиц имеют четную или нечетную симметрии в зависимости от значения полного спина:

$$C_{s_1, m_1, s_2, m_2}^{s, m} = (-1)^{s_1+s_2-s} C_{s_2, m_2, s_1, m_1}^{s, m}. \quad (1.140)$$

Соответствующий мультиплет в разложении называется четным или нечетным.

Глава 2

Фазовая диаграмма

фрустрированной спиновой

лестницы

2.1 Фрустрированная спиновая лестница

В настоящее время фрустрированные спиновые системы являются предметом интенсивных исследований [45, 122, 145, 178]. Интерес к ним возник в результате прогресса в синтезировании соответствующих магнитных материалов [116, 143]. В этих моделях, благодаря конкурирующим взаимодействиям между соседними спинами, основное состояние классической антиферромагнитной системы невозможно построить, минимизируя по-отдельности локальные взаимодействия. Поэтому, оно имеет гораздо более сложный вид, чем простейшее антиферромагнитное состояние Нильса. и, как правило, имеет большую степень вырождения. Фрустрирование может иметь геометрический характер. В этом случае оно возникает в результате конкуренции между различными антиферромагнитными взаимодействиями. Оно может быть обусловлено также наличием как ферро- так и антиферромагнитных

взаимодействий, которые также конкурируют между собой.

Значительная активность наблюдается и в области изучения квази-одномерных спиновых систем. В течение последних лет также было получено много соединений такого типа, имеющих структуру, аналогичную структуре двумерных высокотемпературных сверхпроводников [39]. Они проще для изучения, чем их более сложные двумерные аналоги. Кроме того, мощные теоретические и численные методы, разработанные для одномерных моделей, могут применяться и для их изучения.

Спиновые лестницы с N ступенями образованы из N цепочек со спином $1/2$, расположенных на плоскости параллельно друг другу, причем соответствующие спины соседних цепочек соединены поперечными взаимодействиями. В результате получается полоса, вырезанная из квадратной спиновой решетки. В настоящее время синтезированы множество таких систем. Среди них выделяется семейство $Sr_{n-1}Cu_{n+1}O_{2n}$, состоящее из слабо-связанных спиновых лестниц, которые получаются из слоев исходного соединения $SrCuO_2$. После того, как было высказано предположение, что механизмы, аналогичные существующим в слоях CuO_2 высокотемпературных сверхпроводников, здесь также могут привести к сверхпроводимости [40], развернулись интенсивные теоретические и экспериментальные исследования этих систем. Было установлено, что легированное соединение спин-лестничной системы $Sr_{14-x}Ca_xCu_{24}O_{41}$ является сверхпроводящим до 10 K под высоким давлением. Преимущество лестничных систем состоит в том, что для их изучения доступны методы, которые являются специфическими для одномерных систем, тогда как для двумерных высокотемпературных сверхпроводников такие методы недоступны. Считается, что механизмы, приводящие к сверхпроводимости, аналогичны в обеих системах, так что спиновые лестницы должны способствовать пониманию физики более сложных двумерных сверхпроводящих систем.

Первым шагом в теоретическом понимании этих систем является изучение

нелегированной лестницы со спиновыми взаимодействиями типа Гайзенберга. Точное решение цепочки Гайзенберга со спином $1/2$ было дано много лет назад [23]. Квантовые флуктуации нарушают дальний антиферромагнитный порядок. Спектр возбуждений становится безмассовым (т. е. отсутствует щель между основным состоянием и элементарными возбуждениями), а парные спиновые корреляции убывают по степенному закону в зависимости от расстояния. Тем не менее, переход от лестницы к квадратной решетке при увеличении количества связанных цепей не является гладким. В то время как низко-энергетические свойства лестницы с нечетным числом цепочек аналогичны свойствам отдельной цепочки (непрерывные возбуждения и степенной спад спиновых корреляций), лестницы с четным числом цепей характеризуются конечной энергетической щелью и экспоненциальным затуханием корреляций. Эти замечательные свойства квантовых спиновых лестниц аналогичны свойствам цепочек Гайзенберга, соответственно, с нечетными и четными значениями спина, которые установил Холдейн [93, 90].

Таким образом, возникает естественный вопрос: как лестничные фазы связаны с фазами спиновой цепочки? Для двуногой лестницы на этот вопрос частично

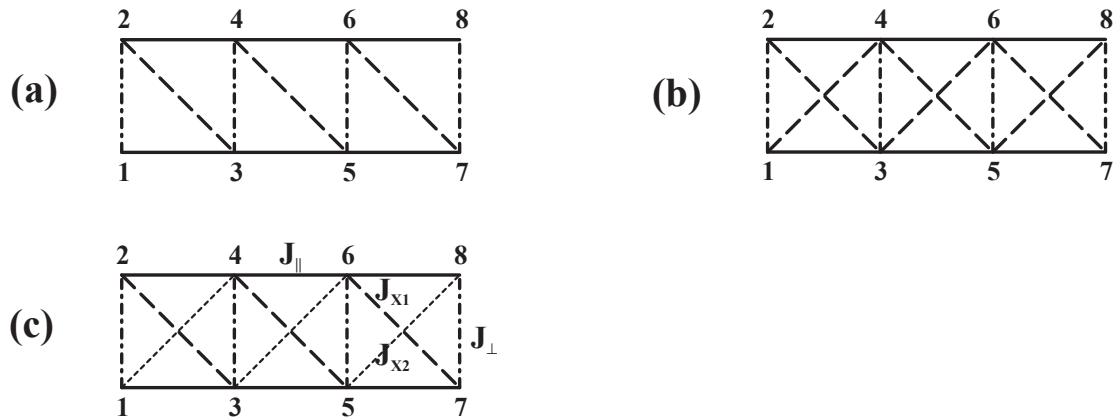


Рис. 2.1: Модели фрустрированных лестниц: (а) Зигзагообразная цепочка. (б) Фрустрированная лестница с равными диагональными взаимодействиями. (с) Фрустрированная лестница с произвольными диагональными взаимодействиями.

ответил Уайт [205]. Он рассмотрел двуногую лестницу с дополнительным взаимодействием вдоль одной из диагоналей каждой грани [Рис. 2.1a] и показал, изменяя это взаимодействие, что существует непрерывный путь от фазы Холдейна к фазе лестницы, которая не содержит критических точек. Вонг рассмотрел лестницу с дополнительными равными взаимодействиями по обеим диагоналям [200], как показано на Рис. 2.1b. Используя ренормгрупповой метод матрицы плотности (DMRG) [203, 204], он доказал существование перехода первого рода и предложил возникновения фазового перехода из фазы Холдейна в синглетную щелевую фазу. Поэтому представляет интерес изучение наиболее общей модели фрустрированной спиновой лестницы [Рис. 2.1c] с различными значениями диагональных взаимодействий, которая содержит предыдущие исследования как частные случаи. Таким образом, мы рассматриваем следующий гамильтониан:

$$H = 2 \sum_{i=1}^L [J_{\parallel} (\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+2} + \mathbf{S}_{2i-1} \cdot \mathbf{S}_{2i+1}) + J_{\perp} \mathbf{S}_{2i-1} \cdot \mathbf{S}_{2i} + J_{X_1} \mathbf{S}_{2i} \cdot \mathbf{S}_{2i+1} + J_{X_2} \mathbf{S}_{2i-1} \cdot \mathbf{S}_{2i+2}] \quad (2.1)$$

(L – длина лестницы, а $N = 2L$ – число спинов) с целью построения ее 3-мерной фазовой диаграммы. Существует очевидная симметрия этого гамильтониана при перестановке параметров J_{X_1} и J_{X_2} . С учетом этого в дальнейшем используем более удобные параметры:

$$\mathcal{S} = J_{X_1} + J_{X_2}, \quad \mathcal{D} = J_{X_1} - J_{X_2}. \quad (2.2)$$

Выберем следующий масштаб для энергии:

$$|2J_{\parallel}| + |J_{\perp}| + |\mathcal{S}| + |\mathcal{D}| = 1 \quad (2.3)$$

Ввиду симметрии достаточно рассмотреть область $\mathcal{D} > 0$. Выберем в качестве независимых переменных $x = 2J_{\parallel}$, $y = \mathcal{S}$, $z = J_{\perp}$ и $\mathcal{D}$. Переменные $\{x, y, z\}$ удовлетворяют условию $|x| + |y| + |z| < 1$ и, поэтому, содержатся в правильном октаэдре, представленном на Рис. 2.2.

Используя ренормгрупповой метод матрицы плотности (DMRG), точную диагонализацию и аналитические расчеты, в данной главе вычисляется поверхность перехода, которая разделяет различные фазы и выявляются ее важнейшие критические области. Дается обзор наиболее важных результатов, полученных ранее для конкретных случаев, включающих модель цепочки Гайзенберга со спинами 1 и $1/2$, их фрустрированные аналоги, димеризованную цепочку и обычную спиновую лестницу. Рассматриваются также области с ферромагнитными взаимодействиями.

Сначала исследуются окрестности отдельных точек восьмигранника, где низкоэнергетические состояния соответствуют аналогичным состояниям цепочки со спином 1 или спином $1/2$. Затем выделяется три области фазовой диаграммы: две топологически различные антиферромагнитные фазы Холдейна и ферромагнитная фаза. Далее подробно описывается метод, который используется для определения поверхности фазового перехода: алгоритм DMRG с подходящими открытыми граничными условиями.

В 3-мерной фазовой диаграмме точки X , Y , L описывают антиферромагнитную цепочку Гайзенберга спина $1/2$ и соответствуют определенным критическим точкам, лежащим на бесщелевых поверхностях, которые разделяют две щелевые фазы Холдейна.

Рассматриваются некоторые выделенные плоскости в октаэдре, соответствующие лестничным моделям, представленным на Рис. 2.1а. Эта модель хорошо изучена и совпадает с зигзагообразной цепочкой Гайзенберга. Мы дадим краткий обзор наиболее важных полученных результатов. Наконец, используя точную диагонализацию и метод DMRG, строится общая фазовая диаграмма и поверхность перехода между тремя указанными фазами.

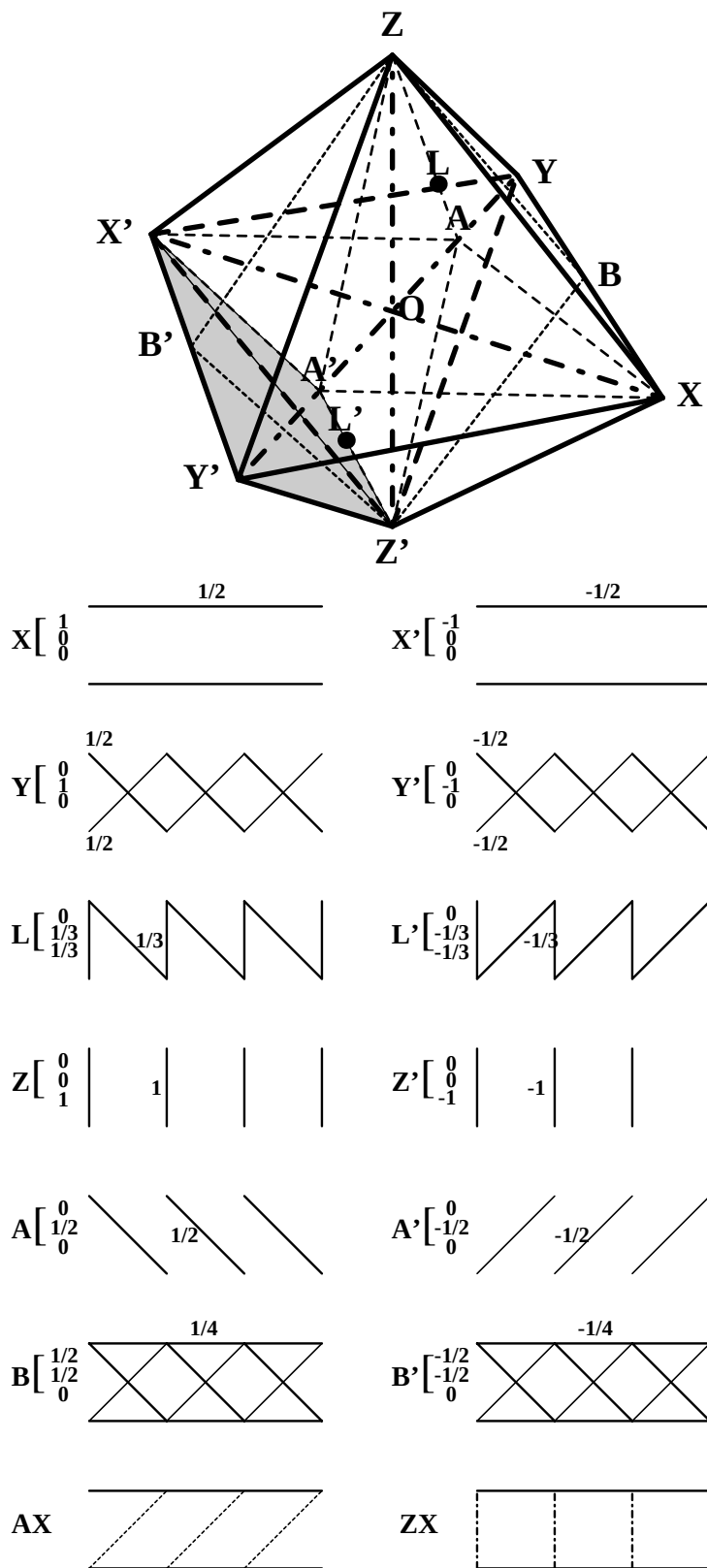


Рис. 2.2: Правильный октаэдр, вписанный в сферу радиуса 1, задающий пространство параметров гамильтониана (2.1). Указаны некоторые специальные точки и их координаты.

2.2 Идентификация различных фаз

2.2.1 Две топологически различные фазы Холдейна

Точка Z' фазовой диаграммы с нулевыми взаимодействиями за исключением $J_{\perp} = -1$ точка A' , где остается лишь $J_{X_2} = -1/2$, соответствуют независимым парам спинов $1/2$, с ферромагнитным взаимодействием соответственно вдоль вертикальных и диагональных ребер. Основные состояния в этих точках вырождены. Им соответствуют 3^L состояний, образованных L триплетами: $\tilde{\mathbf{S}}_i = (\mathbf{S}_{2i} + \mathbf{S}_{2i-1})$ на Z' и $\tilde{\mathbf{S}}_i = (\mathbf{S}_{2i} + \mathbf{S}_{2i-3})$ на A' . В окрестности обеих точек можно применить теорию возмущения при наличии вырождения. Расщепленные 3^L уровни описываются состояниями одной цепочки Гайзенберга со спином 1 с эффективным гамильтонианом

$$H_{eff} = \frac{2J_{\parallel} + J_{X_1} + J_{X_2}}{2} \sum_{i=1}^L \tilde{\mathbf{S}}_i \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{i+1} \quad (2.4)$$

в окрестности точки Z' и гамильтонианом

$$H_{eff} = \frac{2J_{\parallel} + J_{\perp}}{2} \sum_{i=1}^L \tilde{\mathbf{S}}_i \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{i+1} + \frac{J_{X_1}}{2} \sum_{i=1}^L \tilde{\mathbf{S}}_i \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{i+2} \quad (2.5)$$

в окрестности точки A' . Антиферромагнитное эффективное взаимодействие, т. е. $2J_{\parallel} + J_{X_1} + J_{X_2} > 0$ для (2.4) и $2J_{\parallel} > 0$ и $J_{X_1} = 0$ (2.5), соответствуют цепочкам Холдейна. При $J_{X_1} = 0$ оба гамильтониана формально идентичны. Тем не менее, они соответствуют различным топологическим фазам: оператор $\tilde{\mathbf{S}}_i$ описывает спин триплетного состояния, построенного из двух спинов $\frac{1}{2}$, расположенных вдоль ступени в гамильтониане (2.4) и вдоль диагонали в гамильтониане (2.5).

Наиболее важным достижением для понимания цепочки Холдейна стало открытие Аффлеком, Кеннеди, Либом и Тасаки (AKLT) [3, 4] точно решаемого гамильтониана, который отличается от первоначальной модели дополнительным биквадратным взаимодействием:

$$H_{AKLT} = \sum_i \left[\tilde{\mathbf{S}}_i \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{i+1} + \frac{1}{3} (\tilde{\mathbf{S}}_i \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{i+1})^2 \right] \quad (2.6)$$

Его точное основное состояние, называемое жесткая валентная связь (valence-bond solid, VBS), построено из валентных связей [11], не вырождено и не нарушает симметрии. Оно схематически представлено на Рис. 2.3а. Обозначим через $\psi_{\alpha\beta}$ спин-1 состояния, выраженные через симметризованные переменные спина $\frac{1}{2}$:

$$\psi_{++} = |++\rangle, \quad \psi_{--} = |--\rangle, \quad \psi_{+-} = \psi_{-+} = \frac{|+-\rangle + |-+\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (2.7)$$

Соседние спины $\frac{1}{2}$ свернуты друг с другом антисимметричным тензором $\epsilon^{\alpha\beta}$, образуя синглетную валентную связь. Каждый спин связан с обоими своими соседями валентной связью, и VBS состояние можно записать в виде:

$$|\Psi_{VBS}\rangle = 2^{-N/2} \psi_{\alpha_1\beta_1} \epsilon^{\beta_1\alpha_2} \psi_{\alpha_2\beta_2} \epsilon^{\beta_2\alpha_3} \dots \psi_{\alpha_i\beta_i} \epsilon^{\beta_i\alpha_{i+1}} \dots \psi_{\alpha_L\beta_L} \epsilon^{\beta_L\alpha_1} \quad (2.8)$$

Состояние VBS, используемое в качестве приближенного состояния модели Гайзенберга со спином 1, обладает энергией, которая всего на несколько процентов выше энергии основного состояния, как показывают численные расчеты. Поэтому, оно прекрасно описывает физику этой модели при нулевой температуре. Оно имеет скрытый дальний топологический порядок [44]. Легко видеть, что каждый член суммы в (2.8) соответствует последовательности значений S_i^z , упорядоченных как показано на Рис. 2.3b. Если отбросить спины с $S_i^z = 0$, то остальные спины с $S_i^z = \pm 1$ упорядочены по Нилью, т. е. строго антиферромагнитным образом: $|1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\rangle$. Этот топологический порядок характеризуется нелокальным струнным параметром порядка:

$$\mathcal{O}^z(|m-l\rangle) = \left\langle \tilde{S}_l^z \exp \left(i\pi \sum_{k=l+1}^{k=m-1} \tilde{S}_k^z \right) \tilde{S}_m^z \right\rangle. \quad (2.9)$$

Нормированный струнный параметр порядка

$$\tilde{\mathcal{O}}^z(d) = \frac{-\mathcal{O}^z(d)}{\langle (\tilde{S}^z)^2 \rangle^2} \quad (2.10)$$

был введен позже Уайтом [203, 204]. Его значение при $d \rightarrow \infty$ равно 1 для состояния (2.8) и 0,84 для модели Холдейна.

(a)

(-+) (--) (++) (-+) (-+) (--) (+-) (++)

(b)

(0) (-1) (+1) (0) (0) (-1) (0) (+1)

Рис. 2.3: Схематическое изображение типичного компонента VBS состояния.

(a) Штрихованные линии обозначают валентные связи между двумя соседними фиктивными спинами $\frac{1}{2}$. (b) Последовательность спин-1 значений, соответствующих (a): ненулевые спины упорядочены по Нилью $(-1, 1, -1, 1, \dots)$.

Из предыдущего обсуждения следует, что в нашей спиновой системе естественным образом возникают два струнных параметра порядка:

- $\mathcal{O}_\perp(d)$, соответствующая выбору $\tilde{S}_i^z = S_{2i}^z + S_{2i-1}^z$ в выражении (2.9), т. е. триплетным парам вдоль ступеней лестницы;
- $\mathcal{O}_X(d)$, соответствующая выбору $\tilde{S}_i^z = S_{2i}^z + S_{2i-3}^z$ в (2.9), т. е. триплетам вдоль одной из диагоналей.

Эти две типологически различные фазы Холдейна, которые обозначим через $HD_\perp$ и HD_X , характеризуются струнными параметрами порядка $\mathcal{O}_\perp$ и $\mathcal{O}_X$ соответственно. Они были введены в недавней работе Кима и др. [112] и представлены на Рис. 2.4. Используя теоретико-полевые методы, эти авторы нашли свидетельства линии перехода между двумя фазами Холдейна вблизи точек фазовой диаграммы, соответствующих двум изолированным цепочкам Гайзенберга (см. разделы IV и V).

При строго положительном J_{X_1} полный гамильтониан (2.5) эквивалентен фруст-

рированной антиферромагнитной цепочке Гайзенберга спина 1 с взаимодействиями $J_1 = (2J_{\parallel} + J_{\perp})/4$ и $J_2 = J_{X_1}/4$ между ближайшими и следующими за ближайшими соседями соответственно. Эта модель была изучена в работе [114], где был найден резкий скачок параметра $\mathcal{O}_X$ при $J_2/J_1 \approx 0.7444$, что указывает на переход первого рода.

2.2.2 Антиферромагнитные цепочки Гайзенберга спина 1/2

На Рис. 2.2а точки X ($2J_{\parallel} = 1$, все остальные J нулевые) и Y ($J_{X_1} = J_{X_2} = 1/2$, все остальные J нулевые) представляют собой две расщепленные антиферромагнитные цепочки Гайзенберга спина $\frac{1}{2}$, а точка L ($J_{\perp} = J_{X_1} = 1/3$, все остальные J нулевые) представляет собой отдельную антиферромагнитную цепочку Гайзенберга спина $\frac{1}{2}$. Она точно решается методом анзаца Бете [23]. Ее спектр бесщелевой, а парные спиновые корреляции убывают с расстоянием по степенному закону. В последующих раздел доказывается, что эти точки находятся на критической поверхности, разделяющей две фазы Холдейна с различным топологическим порядком.

2.2.3 Ферромагнитное состояние

В серой области $A'Y'X'Z'$ октаэдра (Рис. 2.2а) все константы взаимодействия отрицательны. Основное состояние является ферромагнитным. Оно имеет бесщелевые возбуждения, которые описываются спиновыми волнами.

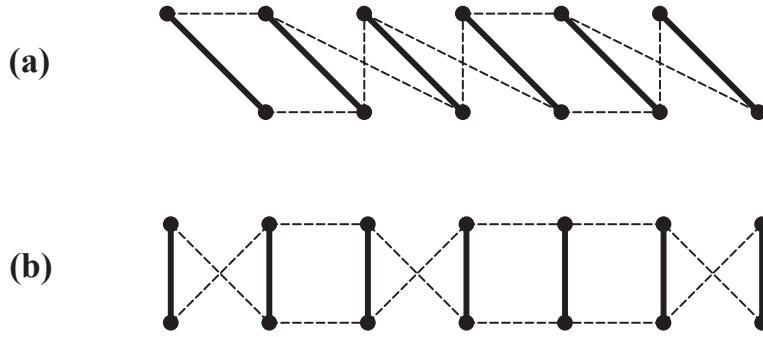


Рис. 2.4: Две топологически различные фазы Холдейна HD_X (a) и $HD_{\perp}$ (b). Жирные линии обозначают триплетные пары, а штрихованные линии – валентные связи.

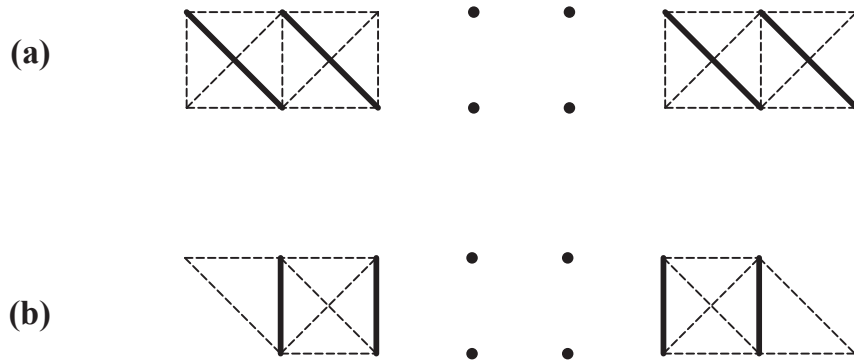


Рис. 2.5: Алгоритм наращивания, используемый нами в DMRG расчетах со свободными границами: (a) в фазе HD_X , где триплетные пары образуются вдоль диагоналей, (b) в фазе $HD_{\perp}$, где они образуются вдоль ступеней. В обоих случаях основное состояние является невырожденным.

2.3 Алгоритм DMRG с подходящими граничными условиями

Нашей целью является определение поверхности перехода, разделяющую две топологически различные фазы Холдейна $HD_{\perp}$ и HD_X . Мы используем ренормгрупповой метод для матрицы плотности (DMRG) с открытыми граничными условиями, который дает гораздо более точные результаты, чем тот же метод с периодическими граничными условиями [204]. Однако, цепочка Холдейна при открытых граничных условиях имеет четырежды вырожденное основное состояние. Это вырождение легко понять, из Рис. 2.3а и выражения (2.8) для состояния с жесткими валентными связями. Из Рис. 2.3 видно, что два спина $\frac{1}{2}$ на концах цепочки остаются свободными. Эффективное взаимодействие между ними падает экспоненциально с ростом L , что в пределе бесконечной цепочки приводит к четырехкратному вырождению основного состояния.

Изучая цепочку спина 1 методом DMRG, Уайт и Хьюс удалили неудобное вырождение, добавив на обоих концах дополнительный спин $\frac{1}{2}$, образующий синглет с со свободной "половиной" спина 1 в цепочке [206]. Мы применим этот трюк к фрустрированной лестнице. Для фазы HD_X мы используем граничные условия, представленные в схематической форме на Рис. 2.5а. Для фазы $HD_{\perp}$ используются другие граничные условия, представленные на Рис. 2.5b. Из рисунков видно, что для состояния VBS в обоих фазах отсутствует "свободный" спин на концах цепочки. Следовательно, основное состояние не вырождено в пределе бесконечной цепочки. Разработанный нами DMRG алгоритм добавляет одну ступень для правого и левого блоков, как показано на Рис. 2.5. Отличие заключается в форме начального блока: в первом случае это прямоугольник, а во втором – трапеция.

Применение одного алгоритма для всех точек фазовой диаграммы (в большинстве предыдущих исследований поступали именно таким образом [200]), как

правило, приводит к численным трудностям при пересечении фазовой границей. Предположим, что мы стартуем от точки из HD_X фазы с соответствующим алгоритмом [Рис. 2.5а] и следуем к $HD_\perp$ фазе. При переходе к $HD_\perp$ фазе основное состояние, которое было невырожденным, становится 4-кратно вырожденным. Поэтому нужно оставлять намного большее число состояний, чтобы получить разумное приближение для точки фазового перехода. Для определения достаточно большого числа различных точек перехода в 3-мерной фазовой диаграмме нужен "дешевый" алгоритм расчета точки перехода с достаточной степенью точности, использующий минимум машинного времени.

Разработанный нами алгоритм использует тот факт, что при фазовом переходе возникают особенности в первой или второй производной энергии. Переход первого порядка характеризуется разрывом первой производной. При переходе же второго порядка вторая производная обращается в бесконечность в критической точке. Ниже приводится пошаговый алгоритм вычислений.

- Выбираем путь $P_0P'_0$ идущий от фазы HD_X к фазе $HD_\perp$, параметризованный переменной u . Используя алгоритм, схематически представленный на Рис. 2.5а, вычисляем энергию в точке P_0 и ее первые и вторые производные. Первую производную энергии по переменным $x = 2J_\parallel$, $y = \mathcal{S}$ и $z = J_\perp$ получаем, вычисляя корреляционные функции

$$\begin{aligned} C_\parallel &= \frac{1}{2}\langle 1 + 4\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+2} \rangle, & C_\perp &= \frac{1}{2}\langle 1 + 4\mathbf{S}_{2i-1} \cdot \mathbf{S}_{2i} \rangle, \\ C_{X1} &= \frac{1}{2}\langle 1 + 4\mathbf{S}_{2i} \cdot \mathbf{S}_{2i+1} \rangle, & C_{X2} &= \frac{1}{2}\langle 1 + 4\mathbf{S}_{2i-1} \cdot \mathbf{S}_{2i+2} \rangle. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Вторая производная вычисляется таким же способом, используя бесконечно малую вариацию по u . В результате, для энергии около точки P_0 получается приближенное выражение в виде полинома второго порядка:

$$E = E_0 + s \frac{\partial E_0}{\partial s} + \frac{1}{2} s^2 \frac{\partial^2 E_0}{\partial s^2} \quad (2.12)$$

- Используя второй алгоритм, представленный на Рис. 2.5b, получаем тем же способом полиномиальное приближение для энергии около точки P'_0 .
- Первое приближение P_0^C критической точки определяется пересечением двух многочленов.
- Выбирается новая отправная точка P_1 на полпути между P_0 и P_0^C , новая конечная точка P'_1 выбирается на полпути между P_0^C и P'_0 , и указанный цикл повторяется сначала.

Для критической точки после 8 до 10 итераций, как правило, получается точность от 4 до 5 цифр. Мы оставляем от 30 до 60 состояний в ренормгрупповом алгоритме и используем цепочки с длиной $L \approx 50$. Некоторые тесты точности приведены ниже в данной главе.

2.4 Зигзагообразная цепочка

Лестничная модель с дополнительным взаимодействием только вдоль одной диагонали, [Рис. 2.1a] может также рассматриваться как цепочка Гайзенберга спина $\frac{1}{2}$, в котором взаимодействуют также следующие за ближайшими соседи. В соответствии с выбранными параметрами (2.3) двумерное пространство параметров этой модели соответствует восьми граням октаэдра $XX'AA'ZZ$ (Рис. 2.6). Существует очевидная симметрия, соответствующая замене вертикальных взаимодействий на диагональные. Линия симметрии $XLX'L'X$, соответствующая обоим равным взаимодействиям, делит область параметров на две эквивалентные части. Благодаря нетривиальному масштабу энергии (2.3), это отображение не соответствует простому отражению.

Грань AXZ , в котором все взаимодействия антиферромагнитны, изучалась в течение долгого времени. На линии симметрии XL точка G , соответствующая

$J_{\perp} = J_{X_1} = 2J_{\parallel}$, была рассмотрена Маджумдаром и Гошем много лет назад [135]. Основное состояние этой системы двукратно вырождено и соответствует вертикальным или диагональным синглетным парам, или димерам. Позже Шастри и Сазерленд [181] доказали, что состояние вертикальных (диагональных) димеров является точным основным состоянием на всей линии GZ (соответственно GA). Отметим, что димерное состояние обладает идеальным струнным порядком и характеризуется соответственно параметрами $\tilde{O}_X = 1$ на GZ и $\tilde{O}_{\perp} = 1$ на GA [204].

Вдоль пути AGZ струнный параметр порядка $\tilde{O}_{\perp}$ претерпевает скачок от 1 до 0 в точке Маджумдара-Гоша G , а $\tilde{O}_{\perp}$ претерпевает скачок, соответственно, от 0 до 1. Линия симметрии LX является линией фазового перехода [38, 28, 50, 35] между двумя симметричными фазами Холдейна HD_X и $HD_{\perp}$.

Обе конца X и L соответствуют цепочке Гайзенберга спина $\frac{1}{2}$. Окрестности этих точек были изучены теоретико-полевыми методами [112, 50, 35, 49]. Имеют место переход первого порядка вблизи X и второго порядка вблизи L . На линии XL характер перехода меняется от первого до второго порядка в некоторой трикритической точке T , где возникает щель между основным состоянием с $S = 0$ и первым возбужденным $S = 1$ состояниями, а также одновременно снимается вырождение между двумя наинизшими возбуждениями со спинами $S = 0$ и $S = 1$.

Используя диагонализацию гамильтониана конечной цепочки, Эмери и др. [50, 35] экстраполировали в термодинамическом пределе значение параметра взаимодействия, при котором разность энергий между этими двумя возбуждениями обращается в нуль и нашли значение $J_{\parallel}/J_{\perp} \approx 0.241$ для точки T . Используя тот же метод, мы не обнаружили никаких признаков существования еще одной трикритической точки на линии симметрии XL . Поэтому, TLX' является критической линией, вероятно, вплоть до X' .

На грани $A'X'Z$ все взаимодействия являются негативными и основное состояние является ферромагнетиком. Ферромагнитная фаза простирается дальше на

соседних грани: $A'X'Z$, $A'XZ$ и $AX'Z$. На этих гранях линия перехода из ферромагнитного в антиферромагнитное состояние соответствует точно решаемой модели, изученной Дмитриевым, Кривновым и Овчинниковым [46], именуемой в дальнейшем ДКО моделью:

$$H_{DKO} = - \sum_{i=1}^L \left(\mathbf{S}_{2i-1} \cdot \mathbf{S}_{2i} - \frac{1}{4} \right) - (\nu - 1) \sum_{i=1}^L \left(\mathbf{S}_{2i} \cdot \mathbf{S}_{2i+1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{(\nu - 1)}{2\nu} \sum_{i=1}^L \left(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+2} - \frac{1}{4} \right) \quad (2.13)$$

Основное состояние этого гамильтониана вырождено и состоит из ферромагнитного и синглетного состояния, которые можно записать в явном виде [46]. В наших обозначениях линии перехода записываются в следующей форме:

- грань $A'X'Z$

$$\begin{aligned} x &= 2J_{\parallel} = (\nu - 1)/(1 + 2\nu - \nu^2) \\ y &= \mathcal{S} = J_{X_2} = -\nu/(1 + 2\nu - \nu^2) \\ z &= J_{\perp} = -\nu(\nu - 1)/(1 + 2\nu - \nu^2) \end{aligned} \quad (2.14)$$

для $0 < \nu < 1$

- грань $AX'Z'$

$$\begin{aligned} x &= 2J_{\parallel} = (\nu - 1)/(1 + 2\nu - \nu^2) \\ y &= \mathcal{S} = J_{X_1} = -\nu(\nu - 1)/(1 + 2\nu - \nu^2) \\ z &= J_{\perp} = -\nu/(1 + 2\nu - \nu^2) \end{aligned} \quad (2.15)$$

для $0 < \nu < 1$

- грань $A'XZ'$ Линия XL' , соответствующая $J_{X_2} = J_{\perp}$, является осью симметрии. Сверху от этой линии ферромагнитный переход задается кривой

$$\begin{aligned} x &= 2J_{\parallel} = (\nu - 1)/(\nu^2 + 2\nu - 1) \\ y &= \mathcal{S} = J_{X_2} = -\nu/(\nu^2 + 2\nu - 1) \\ z &= J_{\perp} = -\nu(\nu - 1)/(\nu^2 + 2\nu - 1) \end{aligned} \quad (2.16)$$

при $1 < \nu < 2$. Снизу от этой линии переход задается кривой

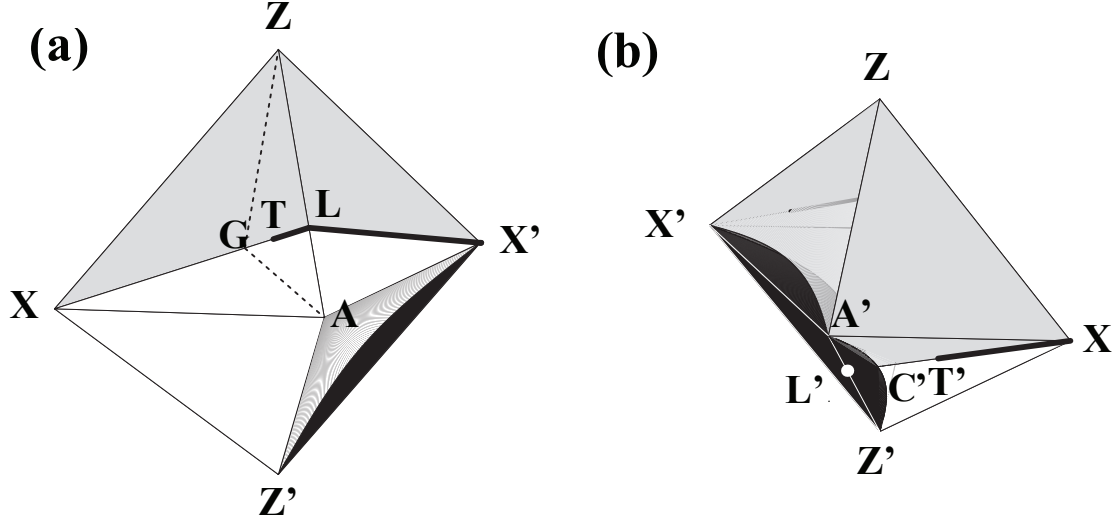


Рис. 2.6: Поверхность нерегулярного октаэдра $XX'AA'ZZ$, на котором представлена двумерная фазовая диаграмма зигзагообразной цепочки. Линия симметрии $XLX'L'/X$ разбивает эту поверхность на две части, которые переходят друг в друга заменой вертикальных взаимодействий на диагональные. Серая (белая) область соответствует HD_X ($HD_\perp$) фазе Холдейна. Черные области соответствуют ферромагнитной области. TLX и $T'X$ – две безмассовые критические линии, соответствующие переходу второго порядка между двумя фазами Холдейна. На TX и $T'E$ имеет место переход первого порядка. Точка G соответствует модели Маджумдара-Гоша. На тонких пунктирных линиях GA и GZ (модель Шастри-Сазерленда) основное состояние является произведением отдельных димеров.

$$\begin{aligned}
 x &= 2J_{\parallel} = (\nu - 1)/(2\nu^2 - 1) \\
 y &= \mathcal{S} = J_{X_2} = -\nu(\nu - 1)/(2\nu^2 - 1) \\
 z &= J_{\perp} = -\nu/(2\nu^2 - 1)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

при $1 < \nu < 2$.

В области $A'XZ$ с ферромагнитными ступенчатыми и диагональными взаимо-

действиями линия симметрии XL пересекает ферромагнитную область в точке

$$C' = (1/7, -2/7, -2/7).$$

С теоретико-полевого точки зрения [112] вблизи X на этой линии отсутствует щель, что соответствует фазовому переходу второго рода. Используя точную диагонализацию для систем до 24 частиц и методы, описанные в [50, 35], обнаружена, что эта критическая линия заканчивается в трикритической точке T' , соответствующей $2J_{\parallel} \approx 0.42$. От точки T' до C' переход между двумя симметричными фазами Холдейна первого порядка, а точка C' , по всей видимости, является тройной точкой. Рисунок 2.6 обобщает эти результаты.

- Область $X'LTXT'C'$ линии симметрии (равные взаимодействия вдоль ступеней и диагоналей) соответствует фазовому переходу между двумя симметричными фазами Холдейна $HD_{\perp}$ и HD_X .
- $X'LT$ и XT (жирные сегментов) являются безмассовыми критическими линиями перехода второго порядка, а XT и $C'T'$ соответствуют фазовому переходу первого порядка с вырожденным основным состоянием и конечной щелью.
- Фазы $HD_{\perp}$ и HD_X по обе стороны от критической линии симметричны. Таким образом, топология их основных состояний различна, но они имеют одинаковые термодинамические свойства и критические показатели вблизи критической линии. Поэтому, они принадлежат одному классу универсальности **[note]**.

Наше исследование общей лестничной модели [Рис. 2.1с] распространяет эту простую схему на всю трехмерную область параметров. Критические линии переходят в критические поверхности и т. д.

2.5 Общая фазовая диаграмма

2.5.1 Некоторые точные критические линии и поверхности

В предыдущем разделе мы видели, что на поверхности восьмигранника $XX'AA'ZZ'$, соответствующей зигзагообразной спиновой цепочке, точка перехода к ферромагнитному состоянию точно известна. Вычислим точную границу для всей ферромагнитной области. Продолжим линии GZ и GA , где димеры образуют основное состояние. Мы докажем, что это состояние расширяется на плоские поверхности и вычислим границу между этой поверхностью и ферромагнитной фазой.

Запишем гамильтониан в виде суммы по квадратам (плакетам):

$$H = \sum_{i=1}^L H_i^{\square},$$

$$H_i^{\square} = 2J_{\parallel}(\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_{i+2} + \mathbf{S}_{2i-1} \cdot \mathbf{S}_{2i+1}) + J_{\perp} \mathbf{S}_{2i-1} \cdot \mathbf{S}_{2i} + 2J_{X_1} \mathbf{S}_{2i} \cdot \mathbf{S}_{2i+1} + 2J_{X_2} \mathbf{S}_{2i-1} \cdot \mathbf{S}_{2i+2}. \quad (2.18)$$

Гамильтониана отдельного плакета $H_i^{\square}$ имеет следующие собственные значения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -3J_{\perp}/2, & \lambda_2 &= J_{\perp}/2 + J_{X_1} + J_{X_2} \\ \lambda_3 &= J_{\perp}/2 - 2(J_{X_1} + J_{X_2}), & \lambda_4 &= -J_{\perp}/2 \\ \lambda_5 &= -\frac{1}{2} \left(J_{X_1} + J_{X_2} + \sqrt{J_{\perp}^2 + 5J_{X_1}^2 - 6J_{X_1}J_{X_2} + 5J_{X_2}^2 - 2J_{\perp}(J_{X_1} + J_{X_2})} \right) \\ \lambda_6 &= -\frac{1}{2} \left(J_{X_1} + J_{X_2} - \sqrt{J_{\perp}^2 + 5J_{X_1}^2 - 6J_{X_1}J_{X_2} + 5J_{X_2}^2 - 2J_{\perp}(J_{X_1} + J_{X_2})} \right). \end{aligned}$$

Собственное значение λ_1 соответствует произведению вертикальных димеров. Легко убедиться в том, что это точное собственное состояние общего гамильтониана H при условии

$$2J_{\parallel} = \mathcal{S} = J_{X_1} + J_{X_2}.$$

Собственное значение λ_2 соответствует ферромагнитному состоянию, которое всегда является точным собственным состоянием полного гамильтониана H . Нижняя

граница энергии основного состояния на единицу длины E_0/L полного гамильтониана H задаётся наименьшим собственным значением λ_{min} . Если оно совпадает с λ_2 , то основное состояние – ферромагнетик, а область, ограниченная поверхностью $\lambda_{min} = \lambda_2$, является ферромагнитной. После простых вычислений находим, что эта поверхность задаётся уравнением

$$w = 4J_{X_1}J_{X_2} + (J_{X_1} + J_{X_2})(2J_{\parallel} + J_{\perp}) + 2J_{\parallel}J_{\perp} = 0 \quad (2.19)$$

внутри тетраэдра $XX'AA'ZZ$ и уравнением

$$w' = (J_{X_1} + J_{X_2})(2J_{\parallel} + J_{\perp}) + 2J_{\parallel}J_{\perp} = 0 \quad (2.20)$$

за пределами этого тетраэдра.

С другой стороны, внешняя граница ферромагнитной области находится из условия неустойчивости спиновых волн в ферромагнитной фазе. Введя бозоны двух видов для представления спиновых операторов, которые соответствуют верхней и нижней цепочке, находим одну оптическую и одну акустическую моды. Энергия акустической моды при $k \rightarrow 0$ равна

$$E_{sw}^{ac} = -wk^2, \quad (2.21)$$

где w соответствует выражению (2.19). Ферромагнитное состояние нестабильно для спиновых волн при $w > 0$. Поверхность $w = 0$, таким образом, задаёт внешнюю оболочку ферромагнитной области. Таким образом, внешняя и внутренняя границы ферромагнитной области совпадают, поэтому поверхность $w = 0$ задаёт точную границу ферромагнитной области.

Стоит обратить внимание на плоскость $ZBZ'B'$ правильного октаэдра (см. рис. 2.2), которая задаётся уравнением $2J_{\parallel} = J_{X_1} + J_{X_2}$. Как уже отмечалось выше, в этой плоскости состояние, образованное вертикальными димерами, является точным собственным состоянием гамильтониана. Оно имеет идеальный струнный порядок $\tilde{O}_X = 1$ и соответствует фазе HD_X . Точный фазовый переход первого рода

в ферромагнитную фазу от точки

$$D = (-2/5, -2/5, 1/5)$$

до точки

$$C = (-2/7, -2/7, 1/7)$$

определяется уравнением

$$\lambda_1 = \lambda_2 \quad 2J_{\perp} + J_{X_1} + J_{X_2} = 0, \quad (2.22)$$

что соответствует модели ДКО (см. рис. 2.7). Другая часть CZ' линии перехода из ферромагнитного в $HD_{\perp}$ фазу задаётся уравнением (2.19).

Линия ZBZ' при $J_{X_1} = J_{X_2} = J_{\parallel} > 0$ соответствует так называемой модели композитного спина [185]. Гамильтониан можно записать в виде:

$$H = H_1 + H_2, \quad H_1 = 2J_{\parallel} \sum_{i=1}^L \tilde{\mathbf{S}}_i \cdot \tilde{\mathbf{S}}_{i+1}, \quad H_2 = 2J_{\perp} \sum_{i=1}^L \mathbf{S}_{2i-1} \cdot \mathbf{S}_{2i}, \quad (2.23)$$

где $\tilde{\mathbf{S}}_i = \mathbf{S}_{2i-1} + \mathbf{S}_{2i}$ представляет собой сумму пары спинов $1/2$, расположенной на i -ой ступени. Гамильтонианы H_1 и H_2 коммутируют.

Основное состояние E_2^0 для H_2 задаётся набором димеров вдоль ступеней спиновой лестницы: $E_2^0/L = -3J_{\perp}/2$. Легко проверить, что оно является также собственным состоянием H с собственным значением E_2^0 . Состояния, где все вертикальные пары спинов $\tilde{\mathbf{S}}_i = \mathbf{S}_{2i-1} + \mathbf{S}_{2i}$ находятся в триплетном состоянии, являются вырожденными собственными состояниями H_2 с уровнями $E_2 = LJ_{\perp}/2$.

Низкоэнергетический спектр H_1 соответствует цепочке Холдейна, основное состояние которого имеет уровень энергии

$$E_1^0 \approx -1.401484039 \times 2J_{\parallel},$$

рассчитанный методом DMRG [206]. Оно является также собственным состоянием H с энергией $E_1 = E_1^0 + E_2$.

Переход первого порядка между фазами димеров и Холдейна $HD_{\perp}$ имеет место при пересечении этих двух уровней энергии $E_1^0 + E_2 = E_2^0$, что соответствует критическому значению

$$J_{\perp}/J_{\parallel} \approx 1.401484039,$$

которое соответствует точке Н). Фаза димеров имеет идеальный струнный порядок $\tilde{\mathcal{O}}_X = 1$, отвечающий HD_X фазе. В точке перехода параметр порядка $\tilde{\mathcal{O}}_X$ претерпевает скачок от 1 до 0, а параметр порядка $\tilde{\mathcal{O}}_{\perp}$ претерпевает скачок от 0 до 0,84. Последнее значение соответствует антиферромагнитной цепочке Холдейна. Мы рассчитали всю линию перехода CGH между фазами $HD_{\perp}$ и HD_X . Она соответствует переходу первого рода, а точка

$$C = (-2/7, 2/7, 1/7)$$

является точной точкой тройного перехода. Цепочка Маджумдара-Гоша, соответствующая точке G , принадлежит этой линии.

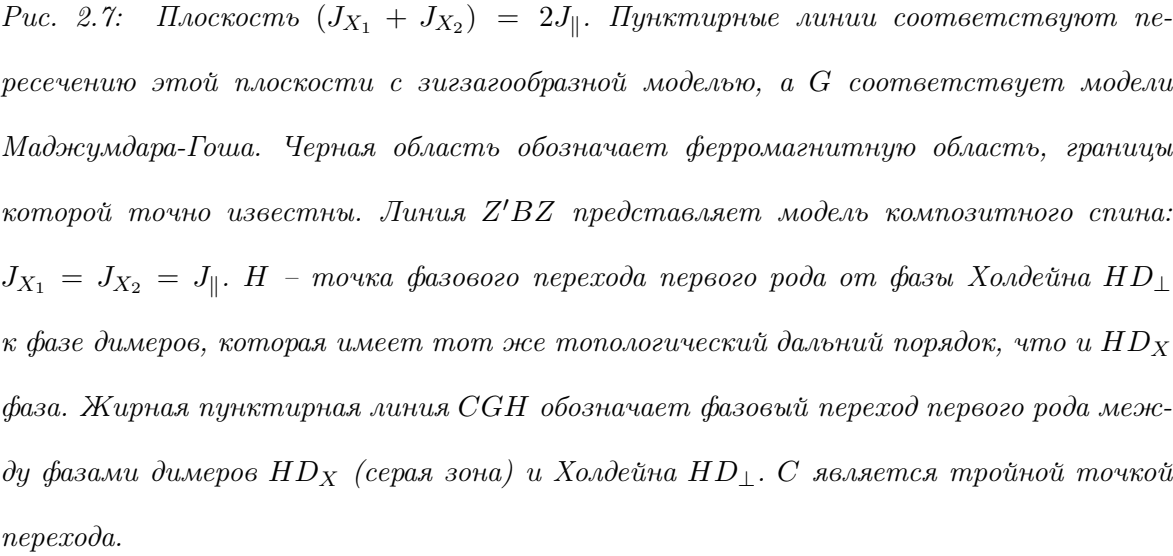
Линия от точки C до G является точной границей для основного состояния из отдельных димеров. Она получается из условия, когда энергия димера λ_1 перестаёт быть самым низким собственным значением изолированной плакета, т. е. когда $\lambda_1 = \lambda_6$ [см. формулу (2.19)]. В выбранном нами масштабе энергии (2.3) эта нижняя граница соответствует следующей кривой:

$$J_{\perp} = (-2 + 5\mathcal{S} + \sqrt{8 - 36\mathcal{S} + 41\mathcal{S}^2})/2 \quad (2.24)$$

для значений $\mathcal{S} > 0$, и

$$J_{\perp} = (-2 - 3\mathcal{S} + \sqrt{8 + 28\mathcal{S} + 25\mathcal{S}^2})/2, \quad (2.25)$$

для значений $\mathcal{S} < 0$ (См. тонкую пунктирную линию на рис. 2.7). За точкой G верхняя граница фазы димеров соответствует пересечению уровней λ_1 и λ_3 , т. е. отрезку $J_{\perp} = \mathcal{S}$.



2.5.2 Фазовая диаграмма в целом

Рассмотрим сектор октаэдра $XX'YY'ZZ$, где $J_{\parallel}$, $J_{\perp}$ и $\mathcal{S}$ положительны. Остальные 7 секторов этого октаэдра подробно рассматриваются в нашей работе [76].

а. Граница поверхности XYZ

Область XYZ с равными диагональными антиферромагнитными связями $J_{X_1} = J_{X_2} = J_X$ [рис. 2.1b], была исследована в работе [200]. Существует очевидная симметрия, которая переставляет $J_{\parallel}$ и J_X поворотом всех нечётных ступенек на угол π вокруг оси лестницы. ZB – ось симметрии, так что достаточно рассмотреть область XBZ . Согласно теоретико-полевым расчётам [112] вокруг точки X , которая соответствует двум невзаимодействующим цепочкам, имеет место фазовый переход первого рода между двумя фазами Холдейна HD_X и $HD_{\perp}$ вдоль линии $J_{\perp} = \mathcal{S}$. Используя разработанный алгоритм, мы рассчитали полную линию перехода от X до H , которая показана на рис. 2.8. Наши результаты находятся в хорошем согласии с более ранними результатами в работе [200].

Однако, наши результаты показали, что в этом направлении имеется фазовый переход первого рода с конечной щелью от HD_X до $HD_{\perp}$ Холдейна фазы, что согласуется с теоретическими результатами [112]. Этот факт не подтверждает выводы в работе [200], где утверждается, что фазовый переход является переходом второго рода.

Как было указано выше, в отличие от нашего алгоритма, который использует различные граничные условия по обе стороны от линии перехода с целью избежать вырождения основного состояния, в работе [200] был везде использован DMRG алгоритм с одинаковыми граничными условиями, показанными на рис. 2.5а. Её автор заметил, что ниже линии перехода основное состояние вырождено, а выше этой линии – не вырождено. Однако, мы не согласны с его выводами о различных свойствах этих двух фаз. Применяя всюду алгоритм DMRG с разными граничны-

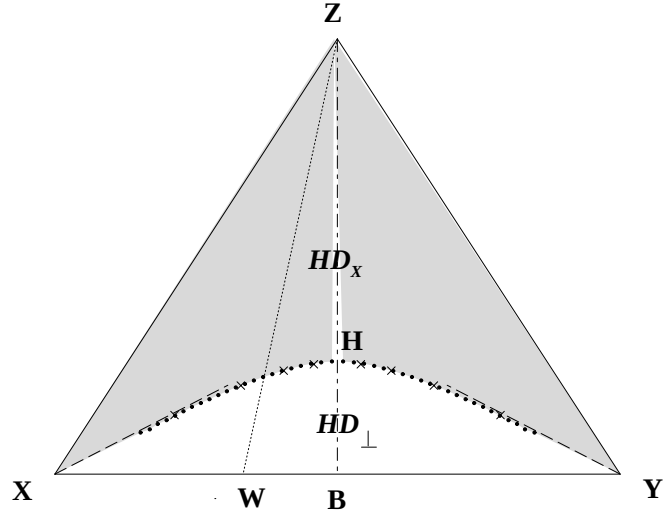


Рис. 2.8: Грань XYZ с равными диагональными взаимодействиями и положительными J . Ось симметрии ZB соответствует модели композитного спина с фазовым переходом первого рода от фазы Холдейна к фазе димеров. Штрихованные пунктирные линии – точные линии перехода в окрестности X и Y , полученные через теорию поля. Точки изображают переходы, полученные нами методом DMRG. Они сравниваются с ранее полученными результатами [200] (крестики). Поведение корреляции пары соседних спинов, щели и струнного параметра порядка вдоль линий ZB и ZW , соответствующих $J_{\parallel} = J_{X_1} + J_{X_2}$, показаны на рис. 2.9.

ми условиями, изображенными на рис. 2.5b, мы обнаружили вырожденное основное состояние выше критической линии и невырожденное – ниже ее! Правильной интерпретацией является, как уже подчеркивалось, переход между двумя топологически различными фазами Холдейна. Кривые, показывающие разрывы парных корреляций (2.11), щели и струнного параметра порядка вдоль пунктирной линии ZW на рис. 2.8, соответствующей $J_{\parallel} = J_{X_1} + J_{X_2}$, и вдоль линии симметрии ZB показаны на рис. 2.9.

b. Плоскость OYZ .

Плоскость OYZ ($J_{\parallel} = 0$) соответствует связанным димеризованным цепочкам. В этой плоскости (рис. 2.10) точка L соответствует простой антиферромагнитной цепочке Гайзенберга, а Y представляет собой две отдельные цепочки. Весомые аргументы существования критические линии, соединяющей L и Y приведены в работах [141, 140], а простое аналитическое приближение этой линии получено в работе [140].

В наших единицах энергии (2.3) она соответствует действительному корню уравнения третьего порядка

$$J_{\perp}^3 - \mathcal{S}(1 - J_{\perp})^2 - \mathcal{S}^3 + 2\mathcal{S}^2(1 - J_{\perp}) = 0. \quad (2.26)$$

Мы определили через DMRG переход между двумя фазами Холдейна в этой плоскости (см. рис. 2.10). От X до L линия перехода примерно соответствует аналитической формуле, предложенной ранее, но за точкой L сильно смещается. Критическая линия продолжается до точки T_1 , которую мы определили, используя тот же метод, что и для зигзагообразной модели. От T_1 до Ω – переход первого порядка с конечной щелью.

c. Поверхность перехода.

Итак, выявлены четыре линии перехода между двумя фазами Холдейна с различными топологиями в четырех разных плоскости диаграммы: XAZ , XYZ ,

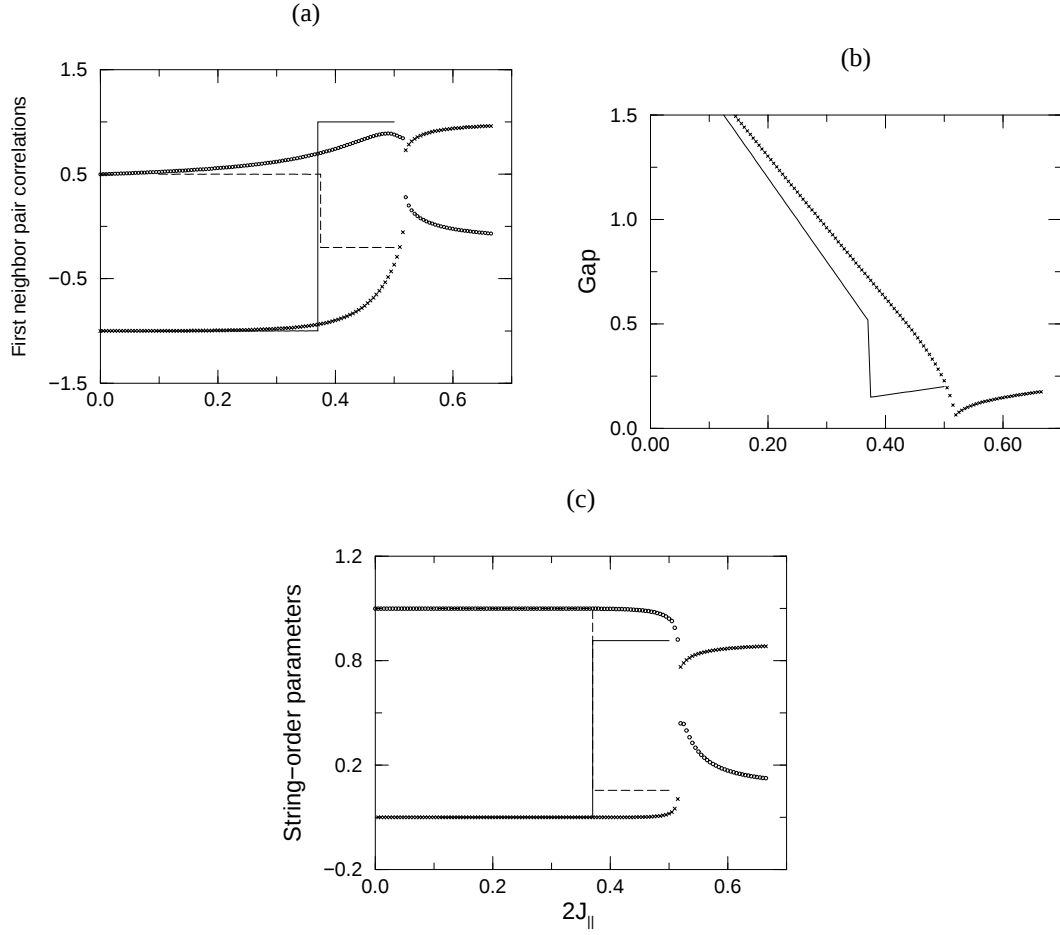


Рис. 2.9: Фазовый переход первого рода между фазами Холдейна с различными топологическими порядками. (a) Парная корреляция $C_{\text{пер}}$ вдоль ZW (крестики) и ZB (сплошная линия); парная корреляция C_{X1} вдоль ZW (кружки) и ZB (пунктирная линия). (b) Щель вдоль ZW (крестики) и ZB (сплошная линия). (c) Струнный параметр порядка $\tilde{O}_X$ вдоль ZW (крестики) и ZB (сплошная линия), струнный параметр порядка $\tilde{O}_{\perp}$ вдоль ZW (кружки) и ZB (пунктирная линия).

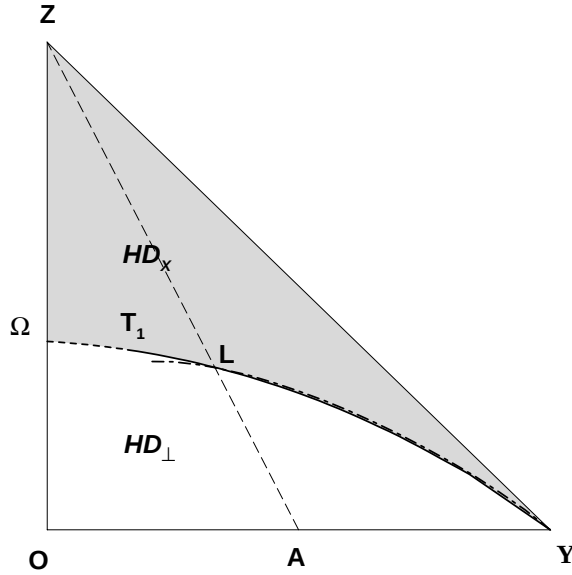


Рис. 2.10: Линия перехода между двумя фазами Холдейна с различными топологическими порядками в плоскости $J_{\parallel} = 0$. L соответствует антиферромагнитной цепочке Гайзенберга спина $1/2$, а Y – двум отдельным цепочкам. Жирная линия YLT_1 является бесцелевой критической. На T_1L (пунктирная линия) – переход первого рода. Штрих-пунктирная линия – простое приближение к критической линии.

OBZ , OYZ . Мы ожидаем, что все четыре линии принадлежат одной и той же поверхности перехода. Используя вышеописанный алгоритм DMRG, мы исследовали эту поверхность перехода в узлах достаточно мелкой двумерной сетки плоскости $\{x, y\}$, оставив от 30 до 60 состояний в DMRG схеме и выбрали шаг сетки сетки равным 0.02×0.02 . Результаты приведены на рис. 2.11. Сечение этой поверхности плоскостями $XALZ$, $OBHZ$, XYZ и OYZ уже представлены на рисунках 2.6, 2.7, 2.8 и 2.10, соответственно. Прямая, соединяющая L с X – линия симметрии плоскости AXZ и лежит на поверхности перехода. Она использована для проверки точности нашего DMRG алгоритма. Для точек нашей сетки $\{x, y\}$, которые лежат на проекция этой линии на плоскость XOY , мы изобразили на рис. 2.12 разницу между приблизительными значениями z_c^{DMRG} поверхности и точными значениями z_c^{Exact} , соответствующими LX .

Кроме окрестности точки X (две отдельные цепочки), где гораздо большее число состояний $\approx 30^2$, должны быть оставлены в схеме DMRG, получаем точность выше трех-четырех знаков на z_c .

Теоретико-полевые результаты [112] показали, что в плоскостях XYZ и $XALZ$ линии перехода, около X имеет место переход первого порядка, что соответствует $S = J_\perp$. В соответствии с этим, наши данные показывают, что плоскость $S = J_\perp$ касается поверхности перехода в точке X .

Определим, какая часть поверхности является критическим с нулевой щелью. Мы ожидаем, что две пересекающиеся критические линии LT_1 и YLT являются частью единой критической области, которая отделена от остальной поверхности (*трикритической линией*), проходящей через T и T_1 . Для определения этой трикритической линии, используется метод, ранее использованный для зигзагообразной цепочки [50, 35, 49].

Согласно конформной теории поля, появляется щель между основным состоянием с $S = 0$ и первым возбужденным состоянием с $S = 1$, одновременно при

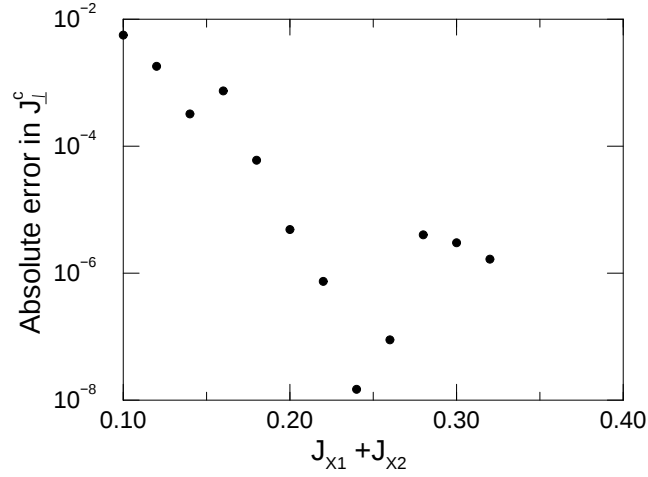


Рис. 2.12: Проверка точности наших вычислений по DMRG с 30 состояниями, вдоль точной линии перехода LX . Точность высока (7 знаков после запятой) у точки Маджумдар-Гоша G . Она резко сокращается (до 2 знаков) вблизи X (две отдельные цепочки Гайзенберга), а также уменьшается при переходе к L в критическом режиме.

этом снимается вырождение первого возбужденного состояния с $S = 0$ и наинизшего $S = 1$ состояния. Таким образом, в термодинамическом пределе, разница δ между энергиями этих двух наинизших возбужденных состояний равна нулю, что соответствует критическому значению параметров взаимодействия, при котором щель исчезает. В качестве простой иллюстрации рассмотрим кривую ΩLY (рис. 2.10 и 2.11), соответствующую разрезу поверхности плоскостью OYZ .

Двигаясь по этой кривой, применим точную диагонализацию для цепочки с $L = N/2$ и периодическими граничными условиями для вычисления значения $\mathcal{S}_c(N)$ параметра $\mathcal{S} = J_{X1} + J_{X2}$, при котором $\delta = 0$.

Результаты представлены на рис. 2.13. Квадратичная экстраполяция дает в термодинамическом пределе $\mathcal{S}_c(N \rightarrow \infty) \approx 0.152$. Значительно более точные результаты (шесть знаков) были получены недавно для зигзагообразной модели (точка T) Эгертом [49]. Он применил конформную теорию поля на линии LX

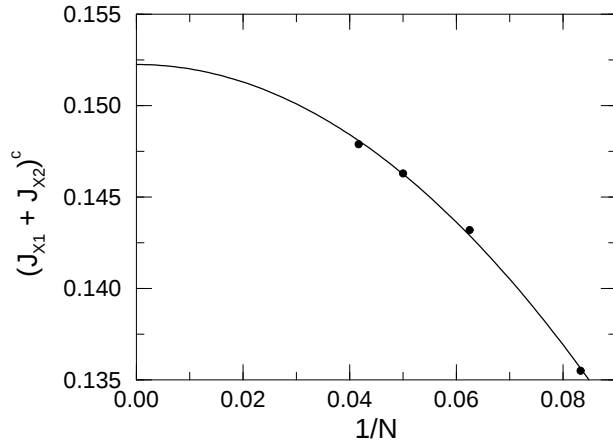


Рис. 2.13: Критическое значение $\mathcal{S} = J_{X_1} + J_{X_2}$, для которого разность δ между двумя низкоэнергетическими возбуждениями исчезает, как функция от $1/N$, для конечных цепей с периодическими граничными условиями. Мы следуем линии перехода ΩLY , вычисленным с помощью DMRG в плоскости OYZ (рис. 2.10). Квадратичная экстраполяция выдает значение $(J_{X_1} + J_{X_2})^c \approx 0.152$ в термодинамическом пределе, которое фиксирует положение точки T_1 на линии перехода.

и заметил, что в критической точке T маргинальный оператор, ответственный за образование щели, исчезает, и разность энергий $\delta(N)$ двух первых возбужденных уровней становится прямо пропорциональной $1/N^3$. Хотя мы и не смогли обобщить этот результат для каждой точки на трикритической линии, но обнаружили, что для большей части трикритической линии, кроме непосредственной близости от границы плоскости XYZ , $1/N^3$, закон работает на удивление хорошо. И мы использовали его, чтобы улучшить нашу точность.

Используя аналогичные вычисления, мы определили всю трикритическую линию T_1TY (жирная белая линия на рис. 2.11). Около Y эта линия приближается к границе поверхности перехода в плоскости XYZ . Мы знаем, однако, что она ее не пересекает: результаты по конформной теории поля [112] подтверждают, что здесь имеет место переход первого порядка.

2.6 Обсуждение

Итак, подробно исследована трехмерная фазовая диаграмма лестничной модели спина $1/2$ с диагональными взаимодействиями. Эта модель содержит, как частный случай, цепочка Гайзенберга спина 1 со взаимодействиями первых и вторых ближайших соседей, зигзагообразная цепочка со спином $1/2$ с дополнительной димеризацией и фрустрацией, обычная спиновая лестница и ранее изученные модели различных спиновых лестниц. Мы доказали наличие только трех различных квантовых фаз: ферромагнитной фазы и две массивные фазы Холдейна, имеющие разный дальний топологический порядок. В трехмерной фазовой диаграмме эти три фазы разделяются поверхностью фазового перехода. Некоторые части этой поверхности, разделяющие две массовые фазы Холдейна, являются критическими с нулевой щелью (массой) и нулевым строковым топологическим параметром порядка. Остальная ее область соответствует фазовым переходам первого рода с

конечной целью и двум вырожденным синглетным основным состояниям.

В двумерных плоскостях, которые являются сечениями трёхмерной фазовой диаграммы и соответствуют зигзагообразной цепочке, простая перестановка взаимодействий вдоль ступеней и диагоналей задает взаимно-однозначное отображение между двумя фазами Холдейна. Таким образом, хотя топология этих двух фаз различается, их термодинамические свойства вблизи критической поверхности одинаковы. Следовательно, они принадлежат одному классу универсальности.

Область на поверхности, разделяющая эти антиферромагнитные и ферромагнитную фазы, соответствует модели ДКО, основное состояние которого точно построено.

Расчёты в основном проводились на суперкомпьютере Cray T3E с использованием пакета MPI для параллельных вычислений.

Глава 3

Упорядочение энергетических уровней для фрустрированной спиновой лестницы

3.1 Введение

Одной из основных задач квантовых систем на решетках является исследование основного состояния и элементарных возбуждений. В частности, низкоэнергетический спектр, определяет поведение системы при низких температурах, когда выявляются квантовые свойства системы. Согласно теории Ландау, фазовые переходы сопровождаются спонтанным нарушением симметрии, что на микроскопическом уровне означает вырождение основного состояния. Поэтому поведение основного состояния при преобразовании симметрии имеют важное значение.

С другой стороны, за редким исключением, большинство многочастичных систем со взаимодействием не имеют аналитических решений. Для их исследования в основном применяются численные методы, которые имеют определенные ограничения. Вместе с тем, существует ряд строгих утверждений для широкого класса

квантовых спиновых и фермионных систем, которые можно применить для характеристики основного состояния и спектра. К их числу относится известная теорема Либа-Маттиса об антиферромагнитном упорядочении энергетических уровней спиновых двухподрешеточных систем.

В данной главе рассматриваются обобщения этой теоремы для фрустрированных спиновых квазиодномерных систем. В главе 2 мы рассматривали фазовую диаграмму спиновой лестницы с обменными взаимодействиями вдоль диагоналей. Во введении к ней на странице 75 мы определили фрустрированные спиновые системы. Здесь, во введении к данной главе, мы сначала обсудим теорему Либа-Маттиса, которая (в том числе) описывает характеристики основного состояния для обычных антиферромагнитных двухподрешеточных систем. Затем обсудим известные общие свойства основного состояния фрустрированных спиновых систем.

3.1.1 Теорема Либа-Маттиса для двухподрешеточных систем

Основное состояние классических двухподрешеточных (bipartite) спиновых систем на решетках обладает строгим антиферромагнитным порядком (порядком Нильса) и не вырождено, если не учитывать вырождение по суммарному спину. В таких системах решетка может быть разделена на две подрешетки A и B , так что все взаимодействия внутри одной и той же подрешетки ферромагнитны, в то время как взаимодействия между различными подрешетками антиферромагнитны. Состояние Нильса соответствует однонаправленным спинам в каждой подрешетке, в то время как спины разных подрешеток противоположно направлены, как показано на рисунке 3.1.

Квантовые флуктуации разрушают состояние Нильса, приводя к более сложному основному состоянию квантовой системы. Однако, для двухподрешеточных спиновых систем основное состояние квантовой системы наследует многие важ-

ные свойства его классического аналога. В частности, Либ и Маттис доказали, что квантовое основное состояние системы конечного размера является невырожденным мультиплетом с полным спином $S_{\text{gs}} = |S_A - S_B|$, который совпадает со спином состояния Нилия классической системы. Здесь, S_A и S_B являются максимально возможными значениями спинов на соответствующих подрешетках [125, 131].

Эта особенность двухподрешеточной системы выглядит естественно, так как в пределе больших значений спина квантовые системы соответствуют классическим. Кроме того, оно подтверждает простое правило, согласно которому энергия растет с ростом спина, свойственное для классических антиферромагнетиков.

В квантовом случае минимальная энергия E_S в секторе, где суммарный спин имеет определенное значение $\hbar S$, а его квадрат равен $\mathbf{S}^2 = \hbar S(S + 1)$, является монотонно возрастающей функцией в области $S \geq S_{\text{gs}}$ [125]. Более того, каждый уровень энергии E_S не вырожден с точностью до мультиплета. Это означает, что все состояния со спином, определяемым числом S , образуют лишь один мультиплет. В этом смысле не вырождено и общее основное состояние. В частности, при $S_A = S_B$ оно является единственным синглетом.

Приведенное утверждение известно как теорема Либ-Маттиса об антиферромагнитном упорядочении энергетических уровней. Она очень важна потому, что она дает информацию об основном состоянии и спектре двухподрешеточных спиновых систем без точного решения и численных расчетов.

3.1.2 Фрустрированные спиновые системы

Фрустрированные спиновые системы – это системы, которые не являются двухподрешеточными. Даже классическое основное состояние таких систем имеет достаточно сложный вид, поскольку все локальные энергии там нельзя одновременно минимизировать в отличие от состояния Нилия (Рис. 3.1).

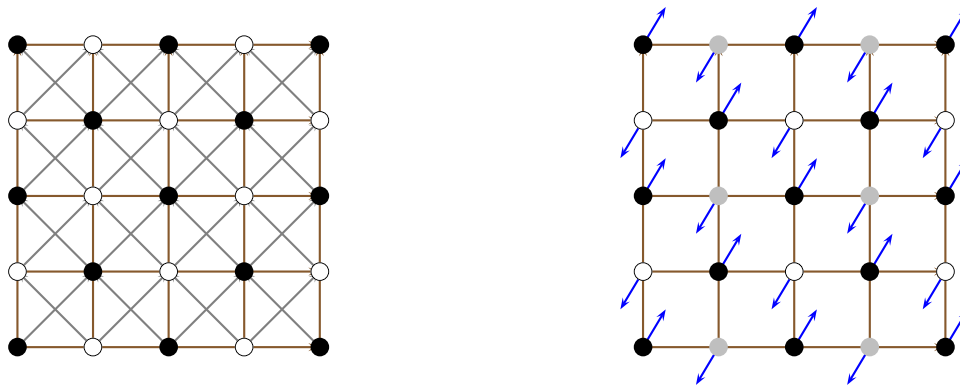


Рис. 3.1: Слева представлена двухподрешеточная система с подрешетками, обозначенными светлыми и темными кружочками. Вертикальные и горизонтальные взаимодействия антиферромагнитные, а диагональные – ферромагнитные. Справа представлено состояние Нуля на двухподрешеточной квадратной решетке.

Обычная теорема Либа-Маттиса не верна для них. Только относительно недавно Либ и Шуп строго доказали, что антиферромагнитные зеркально-симметричные спиновые системы обладают по крайней мере одним синглетным основным состоянием [132, 129]. Кроме того, при определенных дополнительных условиях все основные состояния становятся синглетными. Следует отметить, что достаточно широкий класс фрустрированных спиновых систем удовлетворяет условиям Либа-Шупа. Двумерные антиферромагнетики пирохлора со структурой шахматной решетки является примером такой системы [132]. Еще одним примером является известный двумерный $J_1 - J_2$ антиферромагнетик, а именно модель Гейзенберга на квадратной решетке с дополнительными диагональными взаимодействиями, который много изучался в последнее время [157, 187, 183, 24]. Тем не менее, этот подход не дает никакой информации о вырождении основного состояния и об упорядочении энергетических уровней по значению спина. Для фрустрированных спиновых систем этот вопрос до сих пор остается открытым. Отметим также, что метод, используемый в работах [132] и [129] ограничен системами, которые не имеют спина, расположенного на оси симметрии.

В то же время, в последнее время появились некоторые признаки возможного

существования некоторого обобщения теоремы Либа-Маттиса для фрустрированных спиновых систем. Так, например, изучение $J_1 - J_2$ модели на основе точной диагонализации и спин-волнового приближения показали, что антиферромагнитное упорядочение уровней энергии сохраняется при слабой фрустрации, вызванной диагональными связями [170, 171]. Недавно для той же модели выражение $S_{\text{gs}} = |S_A - S_B|$ для спина основного состояния было проверено численно в работе [133]. Авторы пришли к выводу, что оно остается в силе при условии, что фрустрации достаточно слабые для того чтобы разрушить порядок Ниля в основном состоянии. Некоторые свойства Либа-Маттиса были замечены и в спектрах моделей Гейзенберга на треугольной решетке и решетке КагOME. Все эти исследования позволяют предположить, что во многих случаях даже относительно сильные фрустрации не могут нарушить антиферромагнитный порядок энергетических уровней.

3.1.3 Обобщение теоремы Либа-Маттиса для фрустрированных лестничных систем

В данной главе теорема Либа-Маттиса обобщается для модели со спином $1/2$, на обычной лестничной решетке с фрустрацией, которая задается диагональным взаимодействием и четырехспиновым циклическим обменным взаимодействием.

Мы полагаем, что система инвариантна при отражении относительно продольной оси симметрии лестнице. Это – первый точный результат, связанный с упорядочением уровней энергии для фрустрированной спиновой системы.

Вначале рассматривается спиновая лестница с диагональными взаимодействиями со свободными граничными условиями. Осевая симметрия делит все пространство состояний на два инвариантных сектора, состоящие, соответственно, из симметричных (четных) и антисимметричных (нечетных) волновых функций при отражении относительно продольной оси симметрии лестницы.

Устанавливается антиферромагнитное упорядочение энергетических уровней по-отдельности в четном и нечетном секторах для достаточно широкой области определения констант взаимодействия. Доказывается также невырожденность этих минимальных уровней энергии. Вычисляется значение спина и четность основного состояния.

Далее показано, что полученные точные результаты хорошо согласуются с результатами численных расчетов, а также с известными ранее точными аналитическими вычислениями при некоторых частных значениях констант взаимодействия.

Аналогичное упорядочение энергетических уровней доказывается также для фрустрированной лестницы с граничной примесью, состоящей из одного спина произвольного значения, а также для спиновой лестницы с четырехспиновым циклическим обменным взаимодействием. Некоторые частичные результаты получены также для модели с периодическим граничным условием.

3.1.4 Фрустрированные спиновые лестницы

Двуногая спиновая лестница с дополнительным взаимодействием по диагоналям является одним из простейших фрустрированных спиновых систем. Она может рассматриваться как квази-одномерный аналог $J_1 - J_2$ модели. Эта модель была интенсивно исследована в последнее десятилетие [212, 120, 202, 200, 8, 112, 76, 60]. Фазовая диаграмма при нулевой температуре состоит из двух топологически различных фаз Халдейна, разделенных кривой фазового перехода.

Системы с обменными взаимодействиями многих (трех и более) спинов вызывают большой интерес уже в течение длительного времени [172]. Такие взаимодействия возникают при более высоких порядках в приближении сильной связи модели Хаббарда при половинном заполнении и определяют поправки к модели Гейзенберга в теории возмущений [196]. Мульти-спиновые циклические перестановки, описывающие спиновые обмены, впервые возникли в двумерных квантовых

твердых телах, таких как ^3He [198].

Актуальность четырех-спинового циклического взаимодействия вокруг плакетов, составляющих CuO_2 плоскости в высокотемпературных сверхпроводниках, была отмечена в работе [173], что затем было обосновано экспериментально [172]. В последнее время рассматривались квази-одномерные аналоги таких систем с похожей структурой и свойствами (см. обзор [39]).

Заметим, что модель спиновой лестницы является простейшей системой, где естественным образом возникает четырехспиновый циклический обмен из кулоновского взаимодействия. И действительно, исследования некоторых моделей спиновых лестниц на основе материалов из атомов медных показали важность четырех-спинового обменного члена [29], [177]. Фазовая диаграмма основного состояния фрустрированной лестничной решетки со спином $1/2$ хорошо изучена [8]. Включение четырехспиновых взаимодействий различного типа приводит к новым нестандартным фазам [156, 150, 151, 146, 100, 120]. Различные фазы связаны преобразованием дуальности [146].

3.2 Упорядочение уровней энергии фрустрированной спиновой лестницы

3.2.1 Гамильтониан фрустрированной лестницы и ее симметрии

Рассмотрим две параллельные конечные одинаковые антиферромагнитные цепочки со спином $1/2$, связанные друг с другом обменными взаимодействиями вдоль вертикальных и диагональных ребер лестничной решетки, как показано на рисунке 3.2. Гамильтониан имеет следующий вид [202, 200]:

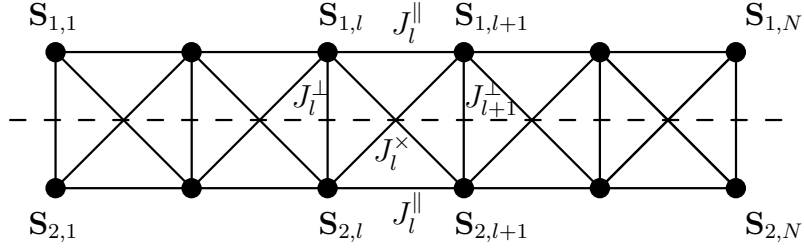


Рис. 3.2: Фрустрированная спиновая лестница. Пунктирная линия является осью симметрии модели.

$$H = \sum_{l=1}^{N-1} J_l^{\parallel} (\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{1,l+1} + \mathbf{S}_{2,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1}) + \sum_{l=1}^{N-1} J_l^{\times} (\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1} + \mathbf{S}_{1,l+1} \cdot \mathbf{S}_{2,l}) + \sum_{l=1}^N J_l^{\perp} \mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{S}_{1,l}$ и $\mathbf{S}_{2,l}$ являются операторами спина первой и второй цепей соответственно. $J_l^{\perp}$ и $J_l^{\times}$ – коэффициенты ступенчатых и диагональных взаимодействий, а $J_l^{\parallel}$ – коэффициенты взаимодействий внутри цепи. Мы используем открытые граничные условия. Коэффициенты зависят от положения спинов. Они не меняются при отражении относительно продольной оси симметрии лестницы. Отражение переставляет спины двух цепей: $\mathcal{R} \mathbf{S}_{1,l} = \mathbf{S}_{2,l} \mathcal{R}$.

Заметим, что данный гамильтониан аналогичен (2.1), уже исследованному в главе 2. Но, в отличие от него, (3.1) инвариантен при отражении, но не является инвариантным при сдвиге, так как константы взаимодействия здесь зависят от положения узла. При постоянных значениях этих констант фазовая диаграмма данной модели при нулевой температуре изучена достаточно подробно численными методами в §2.5.2 (стр. 98). Она представлена на Рис. 2.8.

Мы не ставим никаких ограничений на связи $J_l^{\perp}$ и рассматриваем антиферромагнитные взаимодействия вдоль цепочек. Кроме того, полагаем, что диагональные взаимодействия слабее продольных взаимодействий:

$$J_l^{\parallel} > |J_l^{\times}|. \quad (3.2)$$

Гамильтониан сохраняет полный спин $\mathbf{S} = \sum_l \mathbf{S}_{1,l} + \mathbf{S}_{2,l}$ системы. Поскольку

$\mathcal{R}$ и $\mathbf{S}$ совместимы, собственные состояния (3.1) параметризованы квантовыми числами спина ($S = 0, 1, \dots, N$), проекции спина ($M = -N, -N + 1, \dots, N$), а также отражения ($\sigma = \pm 1$).

Для того, чтобы облегчить использование зеркальной симметрии, введем симметричную и антисимметричную суперпозицию двух спинов каждой вертикали:

$$\mathbf{S}_l^{(s)} = \mathbf{S}_{1,l} + \mathbf{S}_{2,l}, \quad \mathbf{S}_l^{(a)} = \mathbf{S}_{1,l} - \mathbf{S}_{2,l}, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (3.3)$$

Гамильтониан (3.1) через эти операторы выражается проще:

$$H = \sum_{l=1}^{N-1} (J_l^s \mathbf{S}_l^{(s)} \cdot \mathbf{S}_{l+1}^{(s)} + J_l^a \mathbf{S}_l^{(a)} \cdot \mathbf{S}_{l+1}^{(a)}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N J_l^\perp (\mathbf{S}_l^{(s)})^2. \quad (3.4)$$

Здесь мы ввели симметризованные и антисимметризованные константы связи, которые являются антиферромагнитными благодаря наложенному условию (3.2):

$$J_l^s = \frac{J_l^\parallel + J_l^\times}{2} > 0 \quad \text{и} \quad J_l^a = \frac{J_l^\parallel - J_l^\times}{2} > 0. \quad (3.5)$$

Отметим, что аналогичное представление для фрустрированной спиновой лестницы применялось ранее [212, 120].

Гамильтониан можно также выразить через понижающие и повышающие операторы:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N-1} (J_l^s S_l^{(s)+} S_{l+1}^{(s)-} + J_l^s S_l^{(s)-} S_{l+1}^{(s)+} + J_l^a S_l^{(a)+} S_{l+1}^{(a)-} + J_l^a S_l^{(a)-} S_{l+1}^{(a)+}) \\ & + \sum_{l=1}^{N-1} (J_l^s S_l^{(s)z} S_{l+1}^{(s)z} + J_l^a S_l^{(a)z} S_{l+1}^{(a)z}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N J_l^\perp (\mathbf{S}_l^{(s)})^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ниже мы покажем, что при условии $J_l^\parallel > |J_l^\times|$ минимальные уровни энергии $E_{S,\sigma}$ в симметричном ($\sigma = 1$), а также в антисимметричном ($\sigma = -1$) спин- S секторах не вырождены и упорядочены антиферромагнитным образом, т. е. являются возрастающими функциями спина S . Это утверждение обобщает теорему Либаматтиса [125] для модели фрустрированной лестницы. Кратко очертим основные этапы доказательства.

Сначала строим базис, в котором все ненулевые недиагональные матричные элементы гамильтониана отрицательны. Следующим шагом показываем, что матрица гамильтониана, ограниченная на подпространство состояний с фиксированными значениями проекции спина $S^z = M$ и отражения $\mathcal{R} = \sigma$, является связанной. В соответствии с теоремой Перрона-Фробениуса, состояние с наименьшей энергией в каждом таком подпространстве, называемое *относительным основным состоянием*, является невырожденной. Далее устанавливаем, что относительное основное состояние в большинстве случаев имеет полный спин, равный абсолютному значению его z проекции ($S = |M|$). Это означает, что мультиплет, которому оно принадлежит, обладает наинизшей энергией среди всех мультиплетов со спином, равным или большим S . Антиферромагнитное упорядочение между минимальными энергетическими уровнями $E_{S,\sigma}$ следует непосредственно из их невырожденности.

3.2.2 Отрицательный базис

Существование базиса, в котором все недиагональные элементы гамильтониана отрицательны или равны нулю, не является очевидным. Отражение спинов одной подрешетки [125, 2] работает только для двухподрешеточных систем и не приводит к нужному результату для фрустрированных систем. В этом пункте мы строим отрицательный базис для фрустрированной лестницы. Сначала возьмем базис, состоящий из комбинированных спиновых состояний каждой ступени вместо стандартного изинговского базиса. Затем применим унитарное преобразование, которое делает все ненулевых недиагональные элементы симметричной части гамильтониана (3.4) отрицательными. Наконец, все базисные состояния умножаются на определенный знаковый фактор, который и делает все недиагональные элементы отрицательными.

Любое спиновое состояние ступени лестницы может быть выражено через су-

перпозицию трех симметричных триплетных состояний

$$|1\rangle := |1, 1\rangle = \left| \begin{smallmatrix} \uparrow \\ \uparrow \end{smallmatrix} \right\rangle, \quad |-1\rangle := |1, -1\rangle = \left| \begin{smallmatrix} \downarrow \\ \downarrow \end{smallmatrix} \right\rangle, \quad |\tilde{0}\rangle := |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \begin{smallmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{smallmatrix} \right\rangle + \left| \begin{smallmatrix} \downarrow \\ \uparrow \end{smallmatrix} \right\rangle \right) \quad (3.7)$$

и одного антисимметричного синглетного состояния

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \begin{smallmatrix} \uparrow \\ \downarrow \end{smallmatrix} \right\rangle - \left| \begin{smallmatrix} \downarrow \\ \uparrow \end{smallmatrix} \right\rangle \right). \quad (3.8)$$

Здесь используются стандартные обозначения $\uparrow, \downarrow$ для состояний со спином вверх и спином вниз. Для удобства мы коротко обозначаем триплетные состояния через ± 1 и $\tilde{0}$.

Все состояния системы тогда выражаются через базисные состояния

$$|m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \otimes \dots \otimes |m_N\rangle, \quad m_l = \pm 1, \tilde{0}, 0. \quad (3.9)$$

Здесь $|m\rangle$ является одним из четырех состояний на отдельной ступени. Оператор отражения $\mathcal{R}$ диагонален в этом базисе и имеет значение $(-1)^{N_0}$, где N_0 – число синглетов в (3.9).

Теперь определим унитарный оператор, который вращает спины нечетных ступенек вокруг оси z на угол π :

$$U = \exp \left(i\pi \sum_{l=1}^{[(N+1)/2]} S_{2l-1}^{(s)z} \right), \quad (3.10)$$

где $[x]$ обозначает целую часть x . Под действием U операторы понижения-повышения спиновой проекции, соответствующие нечетным ступеням, меняют знак, в то время как другие операторы остаются неизменными.

Аналогичной унитарных сдвиг, применяемый для двухподрешеточной модели, делает отрицательными недиагональные элементы гамильтониана [125, 2]. В нашем случае гамильтониан (3.6) превращается в

$$\begin{aligned} \tilde{H} &= U H U^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{N-1} (-J_l^s S_l^{(s)+} S_{l+1}^{(s)-} - J_l^s S_l^{(s)-} S_{l+1}^{(s)+} - J_l^a S_l^{(a)+} S_{l+1}^{(a)-} - J_l^a S_l^{(a)-} S_{l+1}^{(a)+}) \\ &\quad + \sum_{l=1}^{N-1} (J_l^s S_l^{(s)z} S_{l+1}^{(s)z} + J_l^a S_l^{(a)z} S_{l+1}^{(a)z}) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N J_l^\perp (\mathbf{S}_l^{(s)})^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Легко видеть, что член гамильтониана с $J^\perp$, представленный последней суммой в (3.11), диагонален в базисе (3.9), поскольку он состоит из спиновых квадратов.

Часть гамильтониана с коэффициентами $J^{(s)}$ порождает отрицательные недиагональные элементы. В самом деле, симметризованные операторы спина описывают спин ступени и действуют раздельно на синглетные и триплетные состояния обычным способом. Соответствующие их матрицам недиагональные элементы положительны:

$$\langle \tilde{0} | S^{(s)+} | -1 \rangle = \langle 1 | S^{(s)+} | \tilde{0} \rangle = \langle -1 | S^{(s)-} | \tilde{0} \rangle = \langle \tilde{0} | S^{(s)-} | 1 \rangle = \sqrt{2}. \quad (3.12)$$

Принимая во внимание тот факт, что коэффициенты J_l^s положительны [см. (3.5)], легко видеть, что все те ненулевые недиагональные элементы сдвинутого гамильтониана (3.11), которые генерируются симметризованными спиновыми операторами, отрицательны.

И наконец, мы рассмотрим матричные элементы, которые соответствуют антисимметричным локальным членам гамильтониана (3.11). Они перемешивают триплет с синглетом, все их ненулевые недиагональные матричные элементы принимают следующие значения [57]:

$$\begin{aligned} \langle 0 | S^{(a)+} | -1 \rangle &= \langle -1 | S^{(a)-} | 0 \rangle = \sqrt{2}, & \langle 1 | S^{(a)+} | 0 \rangle &= \langle 0 | S^{(a)-} | 1 \rangle = -\sqrt{2}, \\ \langle \tilde{0} | S^{(a)z} | 0 \rangle &= \langle 0 | S^{(a)z} | \tilde{0} \rangle = 1. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Используя эти уравнения, можно получить все нетривиальные матричные элементы, порождаемые частью гамильтониана с коэффициентом $J^{(a)}$. Нетривиальное действие членов с операторами $S^{(a)\pm}$ на соседние спины имеет следующий вид:

$$S_1^{(a)\mp} S_2^{(a)\pm} |\pm 1\rangle \otimes |\mp 1\rangle = -2 |0\rangle \otimes |0\rangle, \quad (3.14a)$$

$$S_1^{(a)\pm} S_2^{(a)\mp} |0\rangle \otimes |0\rangle = -2 |\pm 1\rangle \otimes |\mp 1\rangle,$$

$$S_1^{(a)\pm} S_2^{(a)\mp} |0\rangle \otimes |\pm 1\rangle = 2 |\pm 1\rangle \otimes |0\rangle, \quad (3.14b)$$

$$S_1^{(a)\mp} S_2^{(a)\pm} |\pm 1\rangle \otimes |0\rangle = 2 |0\rangle \otimes |\pm 1\rangle.$$

Действие же членов с $S^{(a)z}$ имеет вид:

$$S_1^{(a)z} S_2^{(a)z} |0\rangle \otimes |0\rangle = |\tilde{0}\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle, \quad S_1^{(a)z} S_2^{(a)z} |\tilde{0}\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle, \quad (3.15a)$$

$$S_1^{(a)z} S_2^{(a)z} |\tilde{0}\rangle \otimes |0\rangle = |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle, \quad S_1^{(a)z} S_2^{(a)z} |0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle = |\tilde{0}\rangle \otimes |0\rangle. \quad (3.15b)$$

Таким образом, заключаем, что элементы, порождаемые (3.14), приобретают общий знак минус. В то же время элементы, соответствующие (3.15), входят в новый гамильтониан с тем же знаком. Таким образом, член в (3.14b) лишь порождает новые отрицательные недиагональные элементы в $\tilde{H}$, в то время как (3.14a) и (3.15) порождают нежелательные положительные недиагональные элементы. Для того, чтобы изменить их знак, мы заметим следующее.

Благодаря зеркальной симметрии, четность синглетных состояний сохраняется под действием каждого члена (3.11). Матричные элементы (3.14a) и (3.15a) являются единственными, которые несут ответственность за создание и аннигиляцию синглетной пары. Другие элементы оставляют число синглетов без изменений. Таким образом, умножив базисные состояния (3.9) на знаковый фактор $(-1)^{\text{число синглетных пар}} = (-1)^{[N_0/2]}$, можно сделать отрицательными все матричные элементы, порождаемые (3.14a) и (3.15a). При этом, знаковый фактор не влияет на другие элементы матрицы.

Наконец, действие (3.15b) просто переставляет синглетное и $S^z = 0$ триплетное состояния. Введем определенное упорядочение между парой $|0\rangle$ и $|\tilde{0}\rangle$ внутри состояния (3.9): если $|\tilde{0}\rangle$ находится слева от $|0\rangle$, то будем считать их упорядоченными. Обозначим через $N_{0\tilde{0}}$ количество неупорядоченных пар в (3.9). Заметим, что операторы (3.15b) меняют порядок только одной пары. Поэтому, если мы умножим базисное состояние на знаковый фактор $(-1)^{N_{0\tilde{0}}}$, все матричные элементы, порождаемые (3.15b), изменят знак и станут отрицательными, в то время как другие останутся неизменными. Действительно, легко видеть, что перестановки ближайших соседей $|\tilde{0}\rangle |\pm 1\rangle \leftrightarrow |\pm 1\rangle |\tilde{0}\rangle$ и $|0\rangle |\pm 1\rangle \leftrightarrow |\pm 1\rangle |0\rangle$ не меняют количе-

ство неупорядоченных пар $N_{0\bar{0}}$, в то время как рождение и аннигиляция пары $(|\pm 1\rangle |\mp 1\rangle \leftrightarrow |\tilde{0}\rangle |\tilde{0}\rangle$ и $|\pm 1\rangle |\mp 1\rangle \leftrightarrow |0\rangle |0\rangle$) изменяют его значение на четное число. Отметим, что подобный тип знакового фактора был использован для того, чтобы доказать невырожденность относительных основных состояний для моделей Гайзенберга с более высокой симметрией [124].

Таким образом, мы построили базис, в котором все недиагональные матричные элементы гамильтониана (3.11) не положительны:

$$|m_1, m_2, \dots, m_N\rangle := (-1)^{[N_0/2] + N_{0\bar{0}}} |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \otimes \dots \otimes |m_N\rangle. \quad (3.16)$$

3.2.3 Относительные основные состояния в $S^z = M$, $\mathcal{R} = \sigma$ подпространствах

Благодаря сохранению проекции спина и зеркальной симметрии, гамильтониан инвариантен в каждом подпространстве состояний с определенными значениями проекции спина и отражения: $S^z = M$, $\mathcal{R} = \sigma$, где $M = -N, -N+1, \dots, N$ и $\sigma = \pm 1$. Придерживаясь принятой терминологии, мы называем это подпространство (M, σ) подпространством.

Напомним, что матрица называется связанной, если после произвольной перестановки ее столбцов и строк она не сводится к блок-диагональному виду. Используя формулы (3.12), (3.14), (3.15), легко показать, что матрица гамильтониана в построенном нами базисе (3.16), будучи ограниченной на каждое подпространство (M, σ) , является связанной.

Теперь выполнены все условия теоремы Перрона-Фробениуса, и мы приходим к следующему результату:

- Относительное основное состояние $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$ гамильтониана $\tilde{H}$ в подпространстве (M, σ) является невырожденным и представляется в виде положитель-

ной суперпозиции всех базисных состояний:

$$|\Omega\rangle_{M,\sigma} = \sum_{\substack{\sum_l m_l = M \\ (-1)^{N_0} = \sigma}} \omega_{m_1 \dots m_N} |m_1, m_2, \dots, m_N\rangle, \quad \omega_{m_1 \dots m_N} > 0. \quad (3.17)$$

Состояние $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$ должно иметь определенное значение полного спина $S_{M,\sigma}$. В противном случае, он может быть представлено в виде суперпозиции независимых состояний с разными спинами, но равными энергиями. Это противоречило бы с условием единственности. Очевидно также, что если некоторое спин- S состояние не является ортогональным к состоянию $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$, то $S_{M,\sigma} = S$. Ниже это свойство используется для того, чтобы определить значение $S_{M,\sigma}$.

Из-за сохранения спина $S_{M,\sigma} = S_{-M,\sigma}$. Таким образом, можно рассматривать только неотрицательные значения M .

Если $\sigma = (-1)^{N-M}$, то состояние $|\phi\rangle = |\underbrace{1, \dots, 1}_M, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-M}\rangle$, которое является состоянием со старшим весом мультиплета $S = M$, входит в сумму (3.17). Таким образом, он перекрывается с относительным состоянием, и, в соответствии с приведенными аргументами, $S_{M,\sigma} = M$.

Иначе, если $\sigma = (-1)^{N-M-1}$, то оба состояния

$$|\tilde{0}, \underbrace{1, \dots, 1}_M, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-M-1}\rangle, \quad |1, \tilde{0}, \underbrace{1, \dots, 1}_{M-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-M-1}\rangle$$

также представлены в разложении $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$ с положительными коэффициентами. Поэтому их сумма с точностью до несущественного множителя может быть представлена в виде

$$|\psi\rangle = \sqrt{1/2} (|1\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle + |\tilde{0}\rangle \otimes |1\rangle) \otimes |1, \dots, 1, 0, \dots, 0\rangle$$

и, конечно, перекрывается с (3.17). $|\psi\rangle$ имеет определенное значение спина, которое мы сейчас определим. Напомним, что мы в настоящий момент работаем с гамильтонианом (3.11), который получается от первоначального унитарными сдвигом.

Возвращаясь к нему, мы должны перенести состояния обратно. Таким образом, исходное состояние пропорционально

$$U^{-1}|\psi\rangle = U|\psi\rangle \sim \sqrt{1/2}(-|1\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle + |\tilde{0}\rangle \otimes |1\rangle) \otimes \underbrace{|1, \dots, 1, 0, \dots, 0\rangle}_{M-1},$$

Первый множитель – состояние старшего веса триплета, который получается при разложении двух триплетов, тогда как второй множитель является старшим состоянием $S = M - 1$ мультиплета. Вместе они образуют старшее состояние $S = M$ мультиплета. Таким образом, $S_{M,\sigma} = M$ также и в случае $\sigma = (-1)^{N-M-1}$.

Рассмотрим теперь два подпространства с $M = 0$. Для $\sigma = (-1)^N$ состояние, состоящее из димеров на вертикальных ребрах, участвует в сумме (3.17), поэтому относительное основное состояние тоже является синглетом: $S_{0,\sigma} = 0$. Если же $\sigma = (-1)^{N-1}$, то триплетное состояние $|\tilde{0}, \underbrace{0, \dots, 0}_{N-1}\rangle$ входит в указанную сумму, и, следовательно, относительное основное состояние – триплет.

Подводя итоги, мы приходим к следующему выводу:

- Относительное основное состояние $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$ принадлежит мультиплету спина $S = |M|$ за исключением случая $M = 0$ и $\sigma = (-1)^{N-1}$, когда оно входит в триплет. Иначе говоря,

$$S_{M,\sigma} = \begin{cases} 1 & \text{если } M = 0 \text{ и } \sigma = (-1)^{N-1} \\ |M| & \text{для других значений } M \text{ и } \sigma. \end{cases} \quad (3.18)$$

3.2.4 Упорядочение минимальных уровней энергии в различных спиновых секторах

Рассмотрим ограничение гамильтониана на сектор с определенным значением полного спина и отражения. Очевидно, относительное основное состояние $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$ также является состоянием с минимальной энергией в секторе с $S = S_{M,\sigma}$ и $\mathcal{R} = \sigma$. Обозначим через $E_{S,\sigma}$ наинизший уровень энергии в этом секторе. Из невырожденности относительного основного состояния следует, что уровень $E_{S,\sigma}$ с $S = S_{M,\sigma}$

должен быть невырожденным и в данном секторе, т. е. должен содержать только один спин- S мультиплет с четностью σ . Это именно тот мультиплет, который содержит само состояние $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$. Используя (3.18), легко видеть, что любой уровень $E_{S,\sigma}$ не вырожден, за исключением, пожалуй, уровня с $S = 0$ и $\sigma = (-1)^{N-1}$.

Кроме того, каждое подпространство (M, σ) содержит по одному представителю от любого мультиплета с четностью σ и спином $S \geq |M|$. Таким образом, состояние $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$ обладает минимальной энергией среди всех этих мультиплетов. Согласно (3.18), его спин равен $S_{M,\sigma} = |M|$ при условии, что $\sigma = (-1)^N$. Из единственности относительного основного состояния вытекает, что все уровни $E_{S,\sigma}$ со спином $S > S_{M,\sigma}$ расположены выше уровня с $S = S_{M,\sigma}$. Следовательно, $E_{S,\sigma}$ — монотонно возрастающая функция от S . Если $\sigma = (-1)^{N-1}$, то последние уравнение справедливо только при $|M| > 0$ и, следовательно, $E_{S,\sigma}$ возрастает в области $S \geq 1$.

Мы приходим к следующему выводу:

- Минимальные уровни энергии $E_{S,\sigma}$ не вырождены (за возможным исключением случая $S = 0$ и $\sigma = (-1)^{N-1}$) и упорядочены в соответствии с правилом

$$E_{S_1,\sigma} > E_{S_2,\sigma} \quad (3.19)$$

(a) в секторе $\sigma = (-1)^N$ если $S_1 > S_2$, (b) в секторе $\sigma = (-1)^{N-1}$, если $S_1 > S_2 \geq 1$, или $S_1 = 0, S_2 = 1$.

Это правило позволяет определить полный спин минимальных энергетических состояний в симметричном и несимметричном секторах в целом.

- Основное состояние во всем $\sigma = (-1)^N$ секторе является синглетом, а в $\sigma = (-1)^{N-1}$ секторе — триплетом. В обоих случаях оно не вырождено.

3.3 Основное состояние

3.3.1 Точные результаты

Установленное правило (3.19) не соотносит уровни энергии симметричных секторов с уровнями антисимметричных. Ясно, что основное состояние системы в целом совпадает с минимальной энергией либо симметричного, либо антисимметричного сектора. Если же минимальные уровни в обоих секторах совпадают, общее основное состояние становится вырожденным. Используя результаты предыдущего раздела, мы приходим к следующему выводу:

- Основное состояние фрустрированной спиновой лестницы с коэффициентами взаимодействий, удовлетворяющими условию (3.2), может быть: невырожденным синглетом с $\sigma = (-1)^N$, невырожденным триплетом с $\sigma = (-1)^{N-1}$, или их суперпозицией, т. е. синглет $\oplus$ триплет.

Гамильтониан (3.1) для определенной области параметров относится к широкому классу зеркально-симметричных моделей, рассмотренных Либом и Шупом [129]. Используя их результаты, мы показали, что все основные состояния гамильтониана (3.1) являются синглетами при условии $J_l^\perp > |J_{l-1}^\times| + |J_l^\times|$ [83]. Отметим, что этот результат справедлив для любых значений $J_l^\parallel$, в том числе и ферромагнитных.

Комбинируя вместе результаты Либа и Шупа с нашими, мы приходим к выводу, что при условии

$$J_l^\perp > |J_{l-1}^\times| + |J_l^\times| \quad \text{and} \quad J_l^\parallel > |J_l^\times|.$$

только первый случай выше может иметь место, то есть основное состояние является невырожденным $\sigma = (-1)^N$ синглетом. Подробный вывод приведен в работе [83].

Для случая однородной лестницы, когда значения параметров не зависят от расположения узла решетки, можно показать, что [83]:

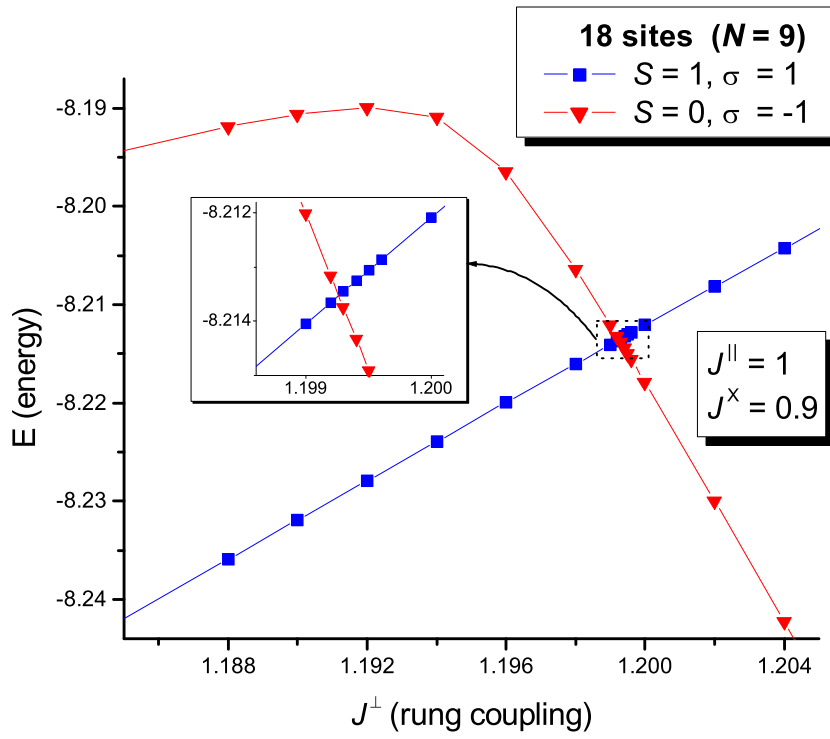


Рис. 3.3: Два минимальных значения энергии, полученные точной диагонализацией модели с 18 узлами ($N = 9$), в зависимости от $J^\perp$. Соответствующие состояния имеют разные значения спина S и отражения σ . Уровни пересекаются в некоторой точке.

- Основное состояние фрустрированной спиновой лестницы конечных размеров с антиферромагнитными взаимодействиями вдоль ступеней $J^\perp$ и цепей $J^\parallel$ является невырожденным спин-синглетном с четностью $\sigma = (-1)^N$ при условии $J^\perp \geq 2J^\times > -J^\perp$ и $J^\parallel > |J^\times|$.

Следует подчеркнуть, что этот результат является строгим только для систем конечных размеров.

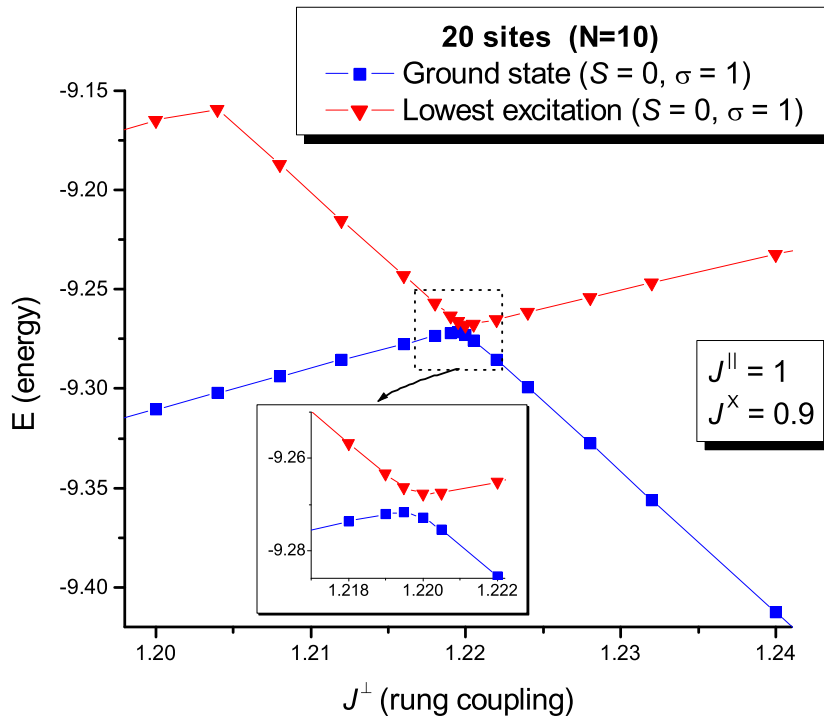


Рис. 3.4: Основное состояние и наинизшее возбуждение системы с 20 узлами ($N = 10$), полученные точной диагонализацией для различных значений $J^{\perp}$. Оба состояния характеризуются одними и теми же квантовыми числами. Уровни не пересекаются в полном согласии с нашими точными результатами.

3.3.2 Термодинамический предел и сравнение с другими подходами

Полученные нами результаты согласуются со свойствами основного состояния фрустрированных спиновых лестниц, которые интенсивно исследовались в литературе до сих пор. Из наших результатов неясно, будет ли иметь место синглет-триплетное вырождение для системы конечного размера. Кроме того, в термодинамическом пределе $N \rightarrow \infty$, может произойти дополнительное вырождение энергетических уровней и, в принципе, строгое неравенство (3.19) должно быть заменено нестрогим. Исследования, проведенные различными методами, позволяют заключить, что все три возможности для основного состояния, описанные

в предыдущей части, могут иметь место. Действительно, вырождение основного состояния происходит только в критических точках, в то время как в большинстве случаев основное состояние является единственным $\sigma = (-1)^N$ синглетом или $\sigma = (-1)^{N-1}$ триплетом. Это свойство остается в силе и в термодинамическом пределе. Оставшаяся часть этого раздела посвящена тестированию нашего точного результата и более детальному сравнению с данными, полученными другими методами.

Анализ случая слабой связи между двумя цепочками ($J^\perp, J^\times \ll J^\parallel$) на основе подхода конформной теории поля показывает, что при $J^\perp > 2J^\times$ основное состояние имеет тенденцию к образованию синглетов вдоль ступеней и триплетов вдоль диагоналей, а при $J^\perp < 2J^\times$ имеет склонность к образованию триплетов вдоль ступеней и синглетов вдоль диагоналей [8]. В первом случае, основное состояние соответствует основному состоянию обычной лестницы, димеризованному вдоль ступеней, в то время как во втором – основному состоянию цепочки Холдейна спина 1. В обоих случаях оно является невырожденным. Эти две фазы принадлежат к одному и тому же классу универсальности, потому что существует непрерывный путь, соединяющий их и не содержащий критических точек [205]. Различие между ними имеет топологический характер, как указано нами в главе 2. Для $J^\perp = 2J^\times$ димеризованные основные состояния обоих типов существуют, что обуславливает их двукратное вырождение [8]. Численное моделирование, проведенное в главе 2, подтверждает эту картину и распространяет кривую фазового перехода вне области слабой связи. Кривая перехода удовлетворяет соотношению $J^\perp < 2J^\times$, касаясь линии $J^\perp = 2J^\times$ в пределе слабой связи.

Основные состояния лестниц с четным и нечетным числом ступеней различаются своими свойствами. Сначала рассмотрим случай нечетного числа ступеней. При малых значениях $J^\perp$ имеет место фаза Холдейна, что соответствует основному триплетному состоянию с $\sigma = 1$, в то время как большие значения приводят к

образованию димеров вдоль ступеней, что соответствует $\sigma = -1$. В некоторой промежуточной точке эти две уровни энергии пересекаются, что соответствует вышеупомянутому случаю с вырожденным синглет-триплетным основным состоянием. Точка пересечения уровней приближается к критической линии в термодинамическом пределе. Численное исследование систем малых размеров подтверждает эту картину. На Рис. 3.3 два наинизших уровня системы с 18 узлами ($N = 9$), полученные точной диагонализацией гамильтониана, приведены для различных значений $J^\perp$. Рисунок четко указывает на пересечение обоих уровней в определенной точке.

Напротив, для четного числа ступенек лестницы состояние Холдейна и ступенчатые димеры являются синглетами и находится в секторе $\sigma = 1$. Но теперь пересечение этих уровней запрещено, потому что наши результаты исключают наличие дважды вырожденного синглетного основного состояния для систем конечного размера. На Рис. 3.4 мы представляем два наинизших уровня, полученные путем численной диагонализации системы с 20 узлами ($N = 10$), для значений параметров, близких к модели композитного спина $J^\parallel = J^\times$. Оба уровня сближаются, но не пересекаются. Это происходит в точке композитного спина, которая находится вне области определения (3.2) параметров нашей модели. Эта модель будет обсуждаться в следующем разделе. В термодинамическом пределе ближайшая точка двух уровней приближается к точке пересечения соответствующих уровней нечетной лестницы, что соответствует точке фазового перехода.

Аналогичное поведение наблюдается и для ферромагнитных взаимодействий вдоль ступеней и диагоналей ($J^\perp < 0$ и $J^\times < 0$). Большие значения $|J^\perp|$ соответствуют фазе Холдейна, а ее малые значения – димерам вдоль ступеней. Кривая фазового перехода в термодинамическом пределе удивительно близка к линии $J^\perp = 2J^\times$ [220] и совпадает с ней в пределе слабой связи между двумя цепочками [8]. Эта кривая была вычислена с высокой точностью с применением различных граничных условий для каждого фазы в главе 2 данной диссертационной работы.

Небольшое отклонение от нее наблюдается только вблизи ферромагнитной фазы.

3.4 Сравнение с известными результатами

В этом разделе мы сравним свойства гамильтониана обобщенной спиновой лестницы (3.1), (3.2), установленные в предыдущем разделе, с данными, полученными ранее при некоторых конкретных значениях констант связи.

3.4.1 Ферромагнитные поперечные взаимодействия

Если положить все константы взаимодействий вдоль ступеней лестницы ферромагнитными, а остальные – антиферромагнитными, то спиновая лестница (3.1) становится двухподрешеточной системой. Две образующие подрешетки A и B состоят из спинов, расположенных, соответственно, на четных и нечетных ступенях. Тогда выполнены условия стандартной теоремы Либа-Маттиса [125], и изинговский базис после унитарного преобразования (3.10) становится отрицательным. Поэтому, относительное основное состояние $|\Omega\rangle_M$ является единственным во всем подпространстве $S^z = M$ и является собственным состоянием оператора отражения. Соответствующее собственное значение $\sigma = 1$, потому что $|\Omega\rangle_M$ является положительной суперпозицией сдвинутых базисных состояний [125], а оператор сдвига (3.10) остается неизменным при отражении. Таким образом, в этом случае минимальная энергия в симметричном секторе ниже, чем в антисимметричном секторе: $E_S = E_{S,1} < E_{S,-1}$.

Как было отмечено, основное состояние не вырождено и имеет спин $S_{\text{gs}} = |S_A - S_B|$, [125, 131], т. е. является синглетом для четных значений N и триплетом для нечетных N . В обоих случаях $\sigma = 1$. Это согласуется с нашими результатами, которые утверждают, что $\sigma = (-1)^N$ для синглетного основного состояния и $\sigma = (-1)^{N-1}$ для триплетного. Все перечисленные свойства похожи на свойства

цепочки Холдейна со спином 1, так как ферромагнитные ступени делают предпочтительным образование там триплетов, и низкоэнергетические свойства хорошо описываются моделью Холдейна [96, 201].

3.4.2 Ферромагнитное взаимодействие вдоль диагоналей

Рассмотрим теперь лестницу, где ферромагнитными являются только диагональные взаимодействия, а остальные – антиферромагнитными. Низкоэнергетические свойства этой системы были исследованы в последнее время в работе [220]. Модель содержит стандартную антиферромагнитную спиновую лестницу как частный случай. В этом случае система тоже становится двухподрешеточной. Подрешетка A состоит из нечетных узлов первой цепи и четных второй цепи, а подрешетка B состоит из четных узлов первой цепи и нечетных второй, как на шахматной доске. Данного вида разделение имеет место также и на квадратной решетке. Оператор вращения спина, приводящий к отрицательному базису, задается выражением $U' = \exp(i\pi S_A^z)$, где $S_A^z = \sum_l (S_{1,2l-1}^z + S_{2,2l}^z)$ определяет проекцию спина подрешетки A [125]. Как и в предыдущем случае, относительное основное состояние $|\Omega\rangle_M$ в M подпространстве является положительной комбинацией смещенных базисных состояний: $\left| \begin{smallmatrix} m_{1,1}, \dots, m_{1,N} \\ m_{2,1}, \dots, m_{2,N} \end{smallmatrix} \right\rangle = U' \left(\left| \begin{smallmatrix} m_{1,1} \\ m_{2,1} \end{smallmatrix} \right\rangle \otimes \dots \otimes \left| \begin{smallmatrix} m_{1,N} \\ m_{2,N} \end{smallmatrix} \right\rangle \right)$, где $m = \uparrow, \downarrow$. Теперь, используя определения $\mathcal{R}$ и U' и простые расчеты, получаем:

$$\mathcal{R} \left| \begin{smallmatrix} m_{1,1}, \dots, m_{1,N} \\ m_{2,1}, \dots, m_{2,N} \end{smallmatrix} \right\rangle = e^{i\pi(S^z - 2S_A^z)} \left| \begin{smallmatrix} m_{2,1}, \dots, m_{2,N} \\ m_{1,1}, \dots, m_{1,N} \end{smallmatrix} \right\rangle = (-1)^{N-M} \left| \begin{smallmatrix} m_{2,1}, \dots, m_{2,N} \\ m_{1,1}, \dots, m_{1,N} \end{smallmatrix} \right\rangle.$$

Следовательно, имеем:

$$\mathcal{R} |\Omega\rangle_M = (-1)^{N-M} |\Omega\rangle_M.$$

Таким образом, из двух (M, σ) подпространств с различными значениями σ , минимальным уровнем энергии обладает подпространство $\sigma = (-1)^{N-M}$, т.е. $E_{S,\sigma} < E_{S,-\sigma}$. Основное состояние является спиновым синглетом с четностью $\sigma = (-1)^N$ в соответствии с нашими результатами в Раз. 3.2.

3.4.3 Модель составного спина

Одинаковые значения диагональных и продольных связей ($J_l^\times = J_l^\parallel$) соответствуют так называемой модели составного спина (composite spin) [186]. Эти значения параметров связи находятся вне диапазона (3.2), где верны наши результаты. Тем не менее, в силу непрерывности, некоторые результаты все еще остаются в силе в этом предельном случае. В частности, правило упорядочения выполняется при замене строгого неравенства в (3.19) на нестрогое, как и в термодинамическом пределе.

С другой стороны, результаты, связанные с единственностью относительных основных состояний не могут быть применены здесь. Действительно, в данном случае, $J_l^{(a)} = 0$ и антисимметризованный член, который несет ответственность за обмен между синглетными и триплетными состояниями на ступенях, отсутствует в гамильтониане (3.11). Спины отдельных ступеней являются сохраняющимися величинами [212]. Таким образом, все синглеты остаются замороженными на своих местах, и гамильтониан больше не представляется связанной матрицей на подпространстве (M, σ) .

При постоянных значениях констант взаимодействий основное состояние было получено в явном виде [212]. При малых $J^\perp$, оно сводится к основному состоянию цепочки Холдейна ($S = 0$, для четного N , $S = 1$ для нечетного N и $\sigma = 1$ всегда), в то время как большие его значения приводят к синглетам вдоль ступеней $|0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle$ [$S = 0$, $\sigma = (-1)^N$]. Это хорошо согласуется с нашими результатами в Раз. 3.3. Оба состояния являются собственными для гамильтониана, что делает пересечение уровней в некоторой критической точке $J_c^\perp(N) < 2J^\times$ неизбежным. При четных N вырождение исчезает при слабом отклонении от точки составного спина, как это обсуждалось в Раз. 3.3. Тем не менее, две наинизшие уровни по-прежнему подходят близко друг к другу, как показано на Рис. 3.4.

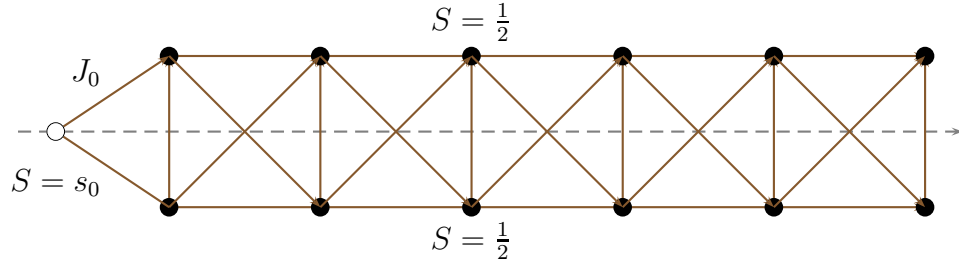


Рис. 3.5: Спиновая лестница с примесным спином s_0 на границе, обозначенном светлой точкой. Спины остальных узлов равны $1/2$.

3.5 Фрустрированная лестница с примесями на границе

Рассмотрим фрустрированную лестницу спина $1/2$ с примесью спина s_0 , как показано на Рис. 3.5. Исходный гамильтониан (3.1) дополняется граничным членом $H_{\text{imp}} = J_0 \mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{S}_1^{(s)}$, $J_0 > 0$, который сохраняет зеркальную симметрию.

3.5.1 Относительные основные состояния

После вращения спинов на нечетных ступенях на угол π вокруг оси z с помощью унитарного оператора (3.10) член с примесью принимает следующий вид:

$$\tilde{H}_{\text{imp}} = U H_{\text{imp}} U^{-1} = -\frac{J_0}{2} (S_0^+ S_1^{(s)-} + S_0^- S_1^{(s)+}) + J_0 S_0^z S_1^{(s)z}.$$

Мы будем работать здесь в базисе, который является естественным продолжением прежнего базиса (3.16):

$$|m_0\rangle \otimes |m_1, \dots, m_N\rangle = (-1)^{[N_0/2] + N_{00}} |m_0\rangle \otimes |m_1\rangle \otimes \dots \otimes |m_N\rangle. \quad (3.20)$$

Здесь $|m_0\rangle := |s_0, m_0\rangle$, где $m_0 = -s_0, \dots, s_0 - 1, s_0$, является обычным базисом мультиплета спина s_0 . Все ненулевые элементы матрицы $S_0^\pm$ положительны:

$$\langle m_0 | S_0^+ | m_0 - 1 \rangle = \langle m_0 - 1 | S_0^- | m_0 \rangle = \sqrt{(s_0 + m_0)(s_0 - m_0 + 1)} > 0.$$

Легко видеть, что спиновые обмены, обусловленные граничным членом, не влияют

на знаковый множитель $(-1)^{[N_0/2]+N_{0\bar{0}}}$. Из этого, а также из (3.12) следует, что $\tilde{H}_{\text{imp}}$ имеет только неположительные недиагональные элементы в базисе (3.20).

Объемная часть (3.11) гамильтониана также неположительна в этом базисе, как уже доказано в Раз. 3.2. Таким образом, весь гамильтониан $\tilde{H} + \tilde{H}_{\text{imp}}$ тоже не имеет положительных недиагональных элементов. Его ограничение на любое (M, σ) подпространство с фиксированными проекцией спина M и четностью σ связано. Применяя снова теорему Перрона-Фробениуса, приходим к выводу, что относительные основные состояния $\tilde{H} + \tilde{H}_{\text{imp}}$ отдельных (M, σ) подпространств не вырождены и являются положительной суперпозицией всех базисных состояний (3.20):

$$|\Omega\rangle_{M,\sigma} = \sum_{\substack{\sum_l m_l = M \\ (-1)^{N_0} = \sigma}} \omega_{m_0 \dots m_N} |m_0\rangle \otimes |m_1, \dots, m_N\rangle, \quad \omega_{m_0 \dots m_N} > 0. \quad (3.21)$$

Теперь обратимся к определению спина $S_{M,\sigma}$ этого состояния. Для этого построим пробное состояние с определенным значением спина и положительными или нулевыми коэффициентами его разложения (3.20), и поэтому оно будет перекрываться с относительными состояниями (3.21). Тогда единственность относительного состояния будет означать, что оба состояния имеют одинаковое значение спина.

Из-за симметрии при спиновом отражении оба состояния $|\Omega\rangle_{\pm M,\sigma}$ имеют одинаковый спин. Таким образом, без ограничения общности мы можем рассмотреть только случай $M \geq 0$. Рассмотрим сначала значения $M \geq s_0$ и докажем, что $S_{M,\sigma} = M$.

В секторе $\sigma = (-1)^{N-M+s_0}$ есть простое старшее состояние $|s_0\rangle \otimes \underbrace{|1, \dots, 1, 0, \dots, 0\rangle}_{M-s_0}$ в мультиплете со спином $S = M$. Оно совпадает с точностью до несущественного знакового фактора с одним из основных состояний (3.20). Таким образом, в этом случае $S_{M,\sigma} = M$.

Для противоположного значения четности при отражении $[\sigma = (-1)^{N-M+s_0-1}]$,

возьмем в качестве тестового состояние

$$|\psi'\rangle = \left(\sqrt{\frac{s_0}{s_0+1}} |s_0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle + \frac{1}{\sqrt{s_0+1}} |s_0-1\rangle \otimes |1\rangle \right) \otimes \underbrace{|1, \dots, 1, 0, \dots, 0\rangle}_{M-s_0},$$

которое можно рассматривать как обобщение состояния $|\psi\rangle$, использованного для системы со свободными границами. $|\psi'\rangle$ является положительной суперпозицией двух базисных состояний из (3.20). Как уже было показано ранее для состояний $|\psi\rangle$, его спин может быть найден переходом к исходному H представлению $|\psi'\rangle \rightarrow U^{-1}|\psi'\rangle$. В результате меняется только знак второго слагаемого в квадратных скобках. Легко проверить, что $\sqrt{\frac{s_0}{s_0+1}} |s_0\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle - \sqrt{\frac{1}{s_0+1}} |s_0-1\rangle \otimes |1\rangle$ является старшим состоянием мультиплета со спином s_0 , который появляется в разложении тензорного произведения двух мультиплетов со спинами s_0 и 1. Таким образом, спин сдвинутого состояния $U^{-1}|\psi'\rangle$ совпадает с M .

Далее, рассмотрим значения $0 \leq M < s_0$, которые важны при $s_0 \geq 1$. Мы покажем, что в данном случае относительные основные состояния в (M, σ) подпространствах принадлежат мультиплету спина $S_{M,\sigma} = s_0$, если $\sigma = (-1)^N$. В противном случае они будут принадлежать мультиплету спина $S_{M,\sigma} = s_0 - 1$. Первое утверждение легко доказать, используя для проверки базисное состояние $|M\rangle \otimes |0, \dots, 0\rangle$ спина s_0 . Во втором случае мы выбираем в качестве тестового состояние

$$|\psi''\rangle = |\chi\rangle \otimes \underbrace{|0\rangle \otimes \dots \otimes |0\rangle}_{N-1},$$

где

$$\begin{aligned} |\chi\rangle = & \sqrt{\frac{(s_0 - M + 1)(s_0 - M)}{2s_0(2s_0 + 1)}} |M-1\rangle \otimes |1\rangle + \sqrt{\frac{(s_0 - M)(s_0 + M)}{s_0(2s_0 + 1)}} |M\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle \\ & + \sqrt{\frac{(s_0 + M + 1)(s_0 + M)}{2s_0(2s_0 + 1)}} |M+1\rangle \otimes |-1\rangle. \end{aligned}$$

Легко видеть, что $|\psi''\rangle$ является положительной суперпозицией трех состояний из базисного набора (3.20). Действие U^{-1} на $|\psi''\rangle$ меняет только знак первого и

последнего членов $|\chi\rangle$, порождая состояние спина $S = s_0 - 1$, как легко убедиться, применив к нему оператор $(\mathbf{S}_0 + \mathbf{S}_1^{(s)})^2$.

В итоге, суммируя полученные результаты, мы приходим к следующему заключению.

- Для лестницы с диагональными взаимодействиями, удовлетворяющими условию (3.2) и граничной примесью спина s_0 с антиферромагнитными связями относительно основное состояние в (M, σ) подпространстве не вырождено и принадлежит мультиплету со спином

$$S_{M,\sigma} = \begin{cases} |M| & \text{if } |M| \geq s_0 \\ s_0 & \text{if } |M| < s_0 \text{ и } \sigma = (-1)^N \\ s_0 - 1 & \text{if } |M| < s_0 \text{ и } \sigma = (-1)^{N-1}. \end{cases} \quad (3.22)$$

Заметим, что при значении спина примеси, равному $s_0 = 1/2$, выполняется только первое условие, и $S_{M,\sigma} = |M|$.

3.5.2 Правило упорядочения и основное состояние

Используя значение спина относительного состояния (3.22) и его единственность, можно сравнивать минимальные уровни энергии $E_{S,\sigma}$ секторов с фиксированным спином и знаком при отражении и устанавливать их степень вырождения точно так же, как и это было сделано выше для системы с открытыми граничными условиями.

При $\sigma = (-1)^N$, как видно из (3.22), энергетический уровень $E_{S,\sigma}$ не вырожден для любого $S \geq s_0$. Единственность относительного основного состояния предполагает, что все минимальные уровни для спинов $S > S_{M,\sigma}$ выше уровня для $S = S_{M,\sigma}$, который содержит само состояние $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$. Таким образом, $E_{S,\sigma}$ является монотонной возрастающей функцией спина в области $S \geq s_0$. Для $S < s_0$ степень

вырождения уровня и порядок уровней не ясны. Все относительные основные состояния $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$ с $|M| \leq s_0$ образуют спин- s_0 мультиплет с наименьшим значением энергии среди всех состояний с четностью $\sigma = (-1)^N$.

При $\sigma = (-1)^{N-1}$ уровень $E_{S,\sigma}$ не вырожден для любого $S \geq s_0 - 1$. Минимальная энергия $E_{S,\sigma}$ является монотонно возрастающей функцией спина в диапазоне $S \geq s_0 - 1$. В случае $s_0 \geq 1$ все относительные основные состояния $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$ с $|M| \leq s_0 - 1$ объединены в один $S = s_0 - 1$ мультиплет с минимальной энергией среди состояний с четностью $\sigma = (-1)^{N-1}$.

Следующее утверждение подводит итог нашей дискуссии.

- Для лестницы с диагональными взаимодействиями, удовлетворяющими условию $J_l^{\parallel} > |J_l^{\times}|$, с антиферромагнитно связанной граничной примесью спина s_0 наинизшие уровни энергии в секторах с фиксированными значениями спина S и четности σ упорядочены в соответствии с правилом $E_{S_1,\sigma} > E_{S_2,\sigma}$: в секторе $\sigma = (-1)^N$ при $S_1 > S_2 \geq s_0$ или $S_1 < S_2 = s_0$, а в секторе $\sigma = (-1)^{N-1}$ при $S_1 > S_2 \geq s_0 - 1$ или $S_1 < S_2 = s_0 - 1$.
- Основное состояние модели в секторе $\sigma = (-1)^N$ образует $S = s_0$ мультиплет, а в секторе $\sigma = (-1)^{N-1}$ — $S = |s_0 - 1|$ мультиплет. В обоих случаях мультиплет является невырожденным.

Как и для лестничной модели без примесей, здесь также не сравниваются энергии секторов с различными четностями. Тем не менее, можно получить информацию об общем основном состоянии. Оно является невырожденным и принадлежит либо $\sigma = (-1)^N$ сектору и, следовательно, имеет спин $S = s_0$, либо $\sigma = (-1)^{N-1}$ сектору и имеет спин, равный $S = |s_0 - 1|$. Если уровни в обоих секторах совпадают, что может произойти, например, за счет дополнительных симметрий, то основное состояние становится вырожденным и представляет собой суперпозицию

двух мультиплетов со значениями спинов s_0 и $|s_0 - 1|$. Таким образом, основное состояние является не более чем двукратно вырожденным.

3.5.3 Пример периодической цепочки со спином $1/2$ с нечетным числом спинов

Трансляционно-инвариантная периодическая цепочка со спином $1/2$ с нечетным $N' = 2N + 1$ числом спинов является частным случаем общего класса фрустрированных спиновых лестниц с граничным спином. Она соответствует $s_0 = 1/2$ и $J_0 = J_l^{\parallel} = J_N^{\perp}$ с нулевыми значениями для других коэффициентов связи. Эта модель точно решается методом Бете анзаца [110], как и его более известный аналог с четным числом спинов, но многие его свойства отличаются от четной цепочки. [19]. В частности, четная цепочка – двухподрешеточная система, и обычная теорема Либа-Маттиса справедлива для нее, в то время как нечетная цепь является фрустрированной системой. Заметим, что построено ее классическое основное состояние и минимальная энергия точно вычислена [176].

Система обладает дополнительной симметрией: оно остается неизменным по отношению к циклическим трансляциям на один шаг решетки T . Операторы трансляции и отражения удовлетворяют коммутационным соотношениям $\mathcal{R}T = T^{-1}\mathcal{R}$. Таким образом, если $|\psi\rangle$ является собственным состоянием в T с собственным значением $e^{i\phi}$, то отраженное состояние $\mathcal{R}|\psi\rangle$ является собственным состоянием с собственным значением $e^{-i\phi}$. Таким образом, для всех значений импульса, за исключением $\phi = 0, \pi$, уровни энергии периодической цепочки, по крайней мере, двукратно вырождены.

Относительные основные состояния четной трансляционно-инвариантной цепочки имеют только исключительные значения импульсов (0 или π), что согласуется с их невырожденностью. С другой стороны, для нечетных цепочек, точ-

ное решение показывает, что относительные основные состояния в $S^z = M$ подпространствах являются двукратно вырожденными с двумя противоположными импульсами $\phi = \pm\pi(M + 1/N')$ [110]. Это согласуется с нашими результатами. Таким образом, относительные основные состояния в симметричных и антисимметричных M подпространствах имеют одинаковую энергию. Причиной вырождения является трансляционная симметрия, которая смешивает эти два состояния. Таким образом, минимальные уровни в симметричных и антисимметричных секторах совпадают ($E_{S,1} = E_{S,-1} = E_S$) а исключением, конечно, $M = \pm N'/2$ подпространств, где присутствует только ферромагнитное состояние. Кроме того, антиферромагнитное упорядочение ($E_{S_1} > E_{S_2}$ при $S_1 > S_2$) имеет место так же как и для четной модели. Общее основное состояние является комбинацией двух спиновых дублетов с разными четностями при отражении.

3.6 Периодическая спиновая лестница

Рассмотрим теперь лестницу с периодическими граничными условиями. Основная часть гамильтониана (3.1) дополняется членом

$$H_{\text{per}} = J_N^{\parallel}(\mathbf{S}_{1,N} \cdot \mathbf{S}_{1,1} + \mathbf{S}_{2,N} \cdot \mathbf{S}_{2,1}) + J_N^{\times}(\mathbf{S}_{1,N} \cdot \mathbf{S}_{2,1} + \mathbf{S}_{1,1} \cdot \mathbf{S}_{2,N}),$$

который описывает взаимодействие между первой и последней ступенькой лестницы. Исходя из условия (3.2), наложим ограничение $J_N^{\perp} > |J_N^{\times}|$ на граничные взаимодействия. В выражение гамильтониана через симметризованные и антисимметризованные операторы спина (3.4) граничный член дает вклад

$$H_{\text{per}} = J_N^s \mathbf{S}_N^{(s)} \cdot \mathbf{S}_1^{(s)} + J_N^a \mathbf{S}_N^{(a)} \cdot \mathbf{S}_1^{(a)},$$

где коэффициенты J_N^s, J_N^a приведены в (3.5). Оба они антиферромагнитны.

3.6.1 Учет матричных элементов от граничных взаимодействий

Под действием унитарного оператора сдвига (3.10) полный гамильтониан приобретает вид $\tilde{H} + \tilde{H}_{\text{per}}$, где $\tilde{H}$ приведен в (3.11), а

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{\text{per}} = U H_{\text{per}} U^{-1} = \frac{(-1)^{N-1}}{2} & \left(J_N^s S_1^{(s)+} S_N^{(s)-} + J_N^s S_1^{(s)-} S_N^{(s)+} + J_N^a S_N^{(a)+} S_1^{(a)-} \right. \\ & \left. + J_N^a S_N^{(a)-} S_1^{(a)+} \right) + J_N^s S_1^{(s)z} S_N^{(s)z} + J_N^a S_1^{(a)z} S_N^{(a)z}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Граничный член $\tilde{H}_{\text{per}}$ порождает положительные недиагональные элементы в базисе (3.16), в котором объемная часть $\tilde{H}$ полного гамильтониана является отрицательным. Это можно проверить, используя вид знакового множителя $(-1)^{N-1}$ в (3.23) и то, что знаковый множитель $(-1)^{N_{0\bar{0}}}$ в базисных состояниях (3.16) является существенно нелокальным.

Член $S_1^{(s)z} S_N^{(s)z}$ диагонален в базисе (3.16). Остальные члены же имеют недиагональные элементы. Во-первых, рассмотрим матричные элементы, которые генерируются членами, содержащими $S^{(a)z}$. Они не зависят от четности N . Используя (3.15) и (3.16), легко проверить, что

$$\langle \tilde{0}, \dots, \tilde{0} | S_1^{(a)z} S_N^{(a)z} | 0, \dots, 0 \rangle = \langle 0, \dots, \tilde{0} | S_1^{(a)z} S_N^{(a)z} | \tilde{0}, \dots, 0 \rangle = (-1)^{N_0 + N_{\bar{0}} + 1}, \quad (3.24)$$

где точками обозначены все промежуточные состояния ступеней, которые должны быть одинаковыми для бра и кет состояний для того, чтобы матричный элемент был бы отличен от нуля. Здесь N_0 и $N_{\bar{0}}$ – числа синглетных и $S^z = 0$ триплетных состояний вдоль ступенек.

Далее, рассмотрим матричные элементы, порожденные понижающими и повышающими спиновыми операторами в (3.23). Принимая во внимание (3.12), по-

лучаем

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{0}, \dots, \tilde{0} | S_1^{(s)\mp} S_N^{(s)\pm} | \pm 1, \dots, \mp 1 \rangle &= \langle \pm 1, \dots, \tilde{0} | S_1^{(s)\pm} S_N^{(s)\mp} | \tilde{0}, \dots, \pm 1 \rangle \\
&= (-1)^{N_0} \cdot 2, \\
\langle 0, \dots, 0 | S_1^{(a)\mp} S_N^{(a)\pm} | \pm 1, \dots, \mp 1 \rangle &= \langle \pm 1, \dots, 0 | S_1^{(a)\pm} S_N^{(a)\mp} | 0, \dots, \pm 1 \rangle \\
&= (-1)^{N_0} \cdot 2.
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Матричные элементы (3.24) и (3.25) вместе с транспонированными им являются единственными недиагональными элементами, порожденными $\tilde{H}_{\text{рег}}$. Они будут отрицательными при условии $(-1)^{N_0+N_0} = (-1)^{N+N_0} = (-1)^{N+N_0} = 1$, потому что значения констант J_n^s и J_n^a положительны. С помощью соотношений $\sigma = (-1)^{N_0}$ и $(-1)^M = (-1)^{N-N_0-N_0}$ мы можем переписать последние уравнения в виде

$$\sigma = (-1)^N = (-1)^M. \tag{3.26}$$

3.6.2 Относительные основные состояния

Вспомним, что основная часть гамильтониана имеет только неположительные недиагональные элементы в базисе (3.16) для любого M и σ (см. Раз. 3.2). Таким образом, весь гамильтониан неположителен только на тех (M, σ) подпространствах, которые удовлетворяют условию (3.26). Кроме того, в любом таком подпространстве, ее матрица связана, потому что связана матрица $\tilde{H}$. Таким образом, согласно теореме Перрона-Фробениуса, относительное основное состояние в каждом (M, σ) подпространстве с квантовыми числами, удовлетворяющими (3.26), не вырождено и представляется в виде положительной суперпозиций всех основных состояний (3.17). Формула (3.18) здесь сводится к $S_{M,\sigma} = |M|$. Результат выглядит следующим образом.

- Для периодической фрустрированной лестницы с четным числом ступеней относительные основные состояния в любом $(M = \text{четно}, \sigma = 1)$ подпространстве единственны и принадлежит мультиплету спина $|M|$. Для лест-

ницы с нечетным числом ступеней это утверждение верно и в любом ($M =$ нечетно, $\sigma = -1$) подпространстве.

Как следствие, минимальные энергетические уровни $E_{S,\sigma}$ среди состояний с фиксированным спином S и четностью σ не вырождены при $\sigma = 1$ и четном S , а также для $\sigma = -1$ и нечетных S . Кроме того, мы имеем частичное антиферромагнитное упорядочение минимальных уровней энергии $E_{S,\sigma}$.

- Для периодической лестницы с четным числом ступеней соотношение $E_{S_1,1} > E_{S_2,1}$ выполняется для любого четного S_2 и любого $S_1 > S_2$. Основное состояние в симметричном ($\sigma = 1$) секторе является единственным синглетом.
- Для лестницы с нечетным числом ступеней $E_{S_1,-1} > E_{S_2,-1}$ для любого нечетного S_2 и любого $S_1 > S_2$.

В отличие от системы со свободными граничными условиями здесь остается открытым вопрос о вырождении и спине основного состояния. Причиной является отсутствие точных результатов для сектора с четностью $\sigma = (-1)^{N-1}$.

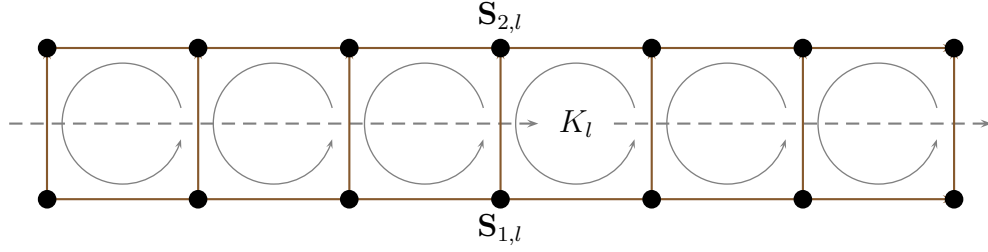


Рис. 3.6: Спиновая лестница с четырехспиновым циклическим взаимодействием по планетам.

3.7 Спиновая лестница с четырехспиновым циклическим взаимодействием

В данной главе рассмотрим спиновую лестницу с четырехспиновым циклическим обменным взаимодействием. Гамильтониан задается выражением (см. Рис. 3.6)

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{l=1}^{N-1} J_l^{\parallel} (\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{1,l+1} + \mathbf{S}_{2,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1}) + \sum_{l=1}^N J_l^{\perp} \mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l} \\
 & + \sum_{l=1}^{N-1} K_l (P_{l,l+1}^{\square} + P_{l,l+1}^{\square-1}).
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Здесь оператор циклического обмена четырех спинов $P^{\square} + P^{\square-1}$ представляет собой суперпозицию двух противоположных (по часовой стрелке и против часовой стрелки) циклических перестановок четырех спинов вокруг каждого квадрата. Наложим условия на константы взаимодействий:

$$J_l^{\parallel} > 2K_l > 0. \tag{3.28}$$

Как и прежде, система сохраняет полный спин и обладает Z_2 симметрией при отражении относительно продольной оси, поэтому гамильтониан остается неизменным на отдельных секторах с фиксированными значениями спина S и четности $\sigma = \pm 1$ при отражении.

3.7.1 Отрицательный базис

Ниже мы покажем, что все ненулевые недиагональные элементы гамильтониана (3.27), (3.28) отрицательны в базисе

$$|m_1, \dots, m_N\rangle = (-1)^{[N_0/2] + N_{0\tilde{0}} + M_{\text{odd}}} |m_1\rangle \otimes \dots \otimes |m_N\rangle. \quad (3.29)$$

Здесь, как и прежде, $m_l = \pm 1, \tilde{0}, 0$ обозначает один из четырех двухспиновых состояний (3.8), (3.7), N_0 – число синглетов, а $N_{0\tilde{0}}$ – общее число пар $(0, \tilde{0})$ в последовательности $m_1, \dots, m_N$, в которых 0 расположен слева от $\tilde{0}$. Также мы ввели число

$$M_{\text{odd}} = \sum_l m_{2l-1},$$

которое соответствует суммарной z -проекции всех спинов на нечетных узлах соответствующей одномерной решетки.

3.7.2 Четырехспиновые перестановки

Перепишем гамильтониан в форме, более удобной для дальнейших целей. Четырехспиновое взаимодействие выражается через операторы спина следующим образом (см., например, [68]):

$$\begin{aligned} P_{l,l+1}^{\square} + P_{l,l+1}^{\square-1} &= \mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{1,l+1} + \mathbf{S}_{2,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1} + \mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l} + \mathbf{S}_{1,l+1} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1} + \mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1} \\ &+ \mathbf{S}_{1,l+1} \cdot \mathbf{S}_{2,l} + 4(\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{1,l+1})(\mathbf{S}_{2,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1}) + 4(\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l})(\mathbf{S}_{1,l+1} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1}) \\ &- 4(\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1})(\mathbf{S}_{2,l} \cdot \mathbf{S}_{1,l+1}) + 1/4. \end{aligned}$$

Используя соотношение $\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = P_{12}/2 - 1/4$, где оператор P_{12} переставляет два спиновых состояния, можно представить это выражение в следующем виде:

$$P_{l,l+1}^{\square} + P_{l,l+1}^{\square-1} = 2(\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1} + \mathbf{S}_{1,l+1} \cdot \mathbf{S}_{2,l}) + P_{l,l+1}^{\parallel} + P_{l,l+1}^{\perp} - P_{l,l+1}^{\times}. \quad (3.30)$$

Здесь $P_{l,l+1}^{\parallel}$, $P_{l,l+1}^{\perp}$ и $P_{l,l+1}^{\times}$ обозначают, соответственно, продольные, поперечные и диагональные перестановки спинов несоответствующего плакета.

Используя (3.30), (3.3) и опуская несущественные скалярный член, приведем гамильтониана (3.27) к следующему виду:

$$H = \sum_{l=1}^{N-1} (J_l^s \mathbf{S}_l^{(s)} \cdot \mathbf{S}_{l+1}^{(s)} + J_l^a \mathbf{S}_l^{(a)} \cdot \mathbf{S}_{l+1}^{(a)}) + \sum_{l=1}^{N-1} K_l (P_{l,l+1}^{\parallel} + P_{l,l+1}^{\bar{}} - P_{l,l+1}^{\times}) + \sum_{l=1}^N \frac{J_l^{\perp}}{2} (\mathbf{S}_l^{(s)})^2. \quad (3.31)$$

В этом уравнении мы переопределили симметризованные и антисимметризованные константы взаимодействий (3.5) без изменения их вида:

$$J_l^s = \frac{J_l^{\parallel}}{2} + K_l, \quad J_l^a = \frac{J_l^{\parallel}}{2} - K_l. \quad (3.32)$$

Заметим, что аналогичное разложение для гамильтониана без четырехспинового обмена было использовано в работах [212], [120]. Перестановки $P^{\parallel}$ и $P^{\times}$ были использованы в работе [68].

3.7.3 Отрицательность недиагональных элементов

Член гамильтониана с коэффициентом $J^{\perp}$ является диагональным в базисе (3.29). Оператор $P_{l,l+1}^{\parallel}$ также диагонален (с собственными значениями, равными ± 1), так как любой продольный триплет (синглет) симметричен (антисимметричен) при отражении.

Члены с J^s соответствуют так называемой модели композитного спина [186]. Они сохраняют продольные спины, так как $\mathbf{S}_l^{(s)}$ описывает полный спин l -й ступени. Синглеты остаются замороженными, и, следовательно, множитель $(-1)^{[N_0/2]+N_{0\bar{0}}}$ в (3.29) остается неизменным. Все ненулевые недиагональные матричные элементы возникают от обменов $|\tilde{0}\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle \leftrightarrow |\pm 1\rangle \otimes |\mp 1\rangle$ и $|\tilde{0}\rangle \otimes |\pm 1\rangle \leftrightarrow |\pm 1\rangle \otimes |\tilde{0}\rangle$ двух соседних триплетных состояний, которые меняют знак $(-1)^{M_{\text{odd}}}$. При этом они совпадают с аналогичными матричными элементами цепочки Холдейна в базисе, образованным состояниями $(-1)^{M_{\text{odd}}} |m_1\rangle \otimes \dots \otimes |m_N\rangle$ [125]. Таким образом, данная часть гамильтониана является неположительной в построенном нами базисе

(3.29).

J^a матричные элементы, возникающие от антисимметризованных спинов гамильтониана, были рассмотрены в предыдущих разделах данной главы. В отличие от симметричного случая, соответствующие операторы перемешивают триплет с синглетом. Используя (3.13) и (3.29), легко проверить:

$$\begin{aligned} \langle \dots, 0_l, 0_{l+1}, \dots | S_l^{(a)\mp} S_{l+1}^{(a)\pm} | \dots, \pm 1_l, \mp 1_{l+1}, \dots \rangle \\ = -2(-1)^{[N_0/2]+N_{0\tilde{0}}+M_{\text{odd}}-[N'_0/2]-N'_{0\tilde{0}}-M'_{\text{odd}}} = -2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

где остающиеся неизменными узлы заменены точками. Действительно, согласно определению $N_{0\tilde{0}}$ разность $N_{0\tilde{0}} - N'_{0\tilde{0}}$ в (3.33) является четным числом. Кроме того, $N'_0 = N_0 + 2$ и $M_{\text{odd}} = M'_{\text{odd}} \pm 1$ в зависимости от того, является ли l четным или нечетным. Поэтому, показатель в (3.33) – четное число, и уравнение верно. Следующий нетривиальный элемент матрицы гамильтониана также является отрицательным, поскольку

$$\begin{aligned} \langle \dots, 0_l, \pm 1_{l+1}, \dots | S_l^{(a)\mp} S_{l+1}^{(a)\pm} | \dots, \pm 1_l, 0_{l+1}, \dots \rangle \\ = 2(-1)^{M_{\text{odd}}-M'_{\text{odd}}} = 2(-1)^{\pm 1} = -2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

а квантовые числа $N_{0\tilde{0}}$ и N_0 одинаковы для обоих состояний.

Напротив, z проекции антисимметризованных операторов сохраняют квантовое число M_{odd} . Они также создают отрицательные матричные элементы:

$$\begin{aligned} \langle \dots, 0_l, 0_{l+1}, \dots | S_l^{(a)z} S_{l+1}^{(a)z} | \dots, \tilde{0}_l, \tilde{0}_{l+1}, \dots \rangle = (-1)^{N_{0\tilde{0}}-N'_{0\tilde{0}}+(N_0-N'_0)/2}, \\ = (-1)^{\text{even}-1} = -1 \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\langle \dots, \tilde{0}_l, 0_{l+1}, \dots | S_l^{(a)z} S_{l+1}^{(a)z} | \dots, 0_l, \tilde{0}_{l+1}, \dots \rangle = (-1)^{N_{0\tilde{0}}-N'_{0\tilde{0}}} = (-1)^1 = -1. \quad (3.36)$$

Выражения (3.33), (3.34), (3.35), (3.36) вместе с сопряженными им составляют полный набор нетривиальных матричных элементов гамильтониана (3.31), порожденных членами с J^a .

Рассмотрим, наконец, недиагональные члены, которые несут ответственность за четырехспиновый циклический обмен. Оператор $P_{l,l+1}^{\bar{=}}$ переставляет состояния

на соседних ступенях. В то же время оператор $P_{l,l+1}^\times$ является знакопеременной перестановкой: во время перестановки синглета с триплетным состоянием он порождает дополнительный минус. Таким образом, разность $P_{l,l+1}^\equiv - P_{l,l+1}^\times$ исчезает, если спины на ступеньках совпадают. Если же они отличаются, этот оператор просто переставляет их, умножая на 2. Тогда, используя определение (3.29), получаем

$$\begin{aligned} \langle \dots, t_l, 0_{l+1}, \dots | P_{l,l+1}^\equiv - P_{l,l+1}^\times | \dots, 0_l, t_{l+1}, \dots \rangle &= 2(-1)^{M_{\text{odd}} - M'_{\text{odd}} + N_{0\tilde{0}} - N'_{0\tilde{0}}} \\ &= -2, \end{aligned} \quad (3.37)$$

где $t = \tilde{0}, \pm 1$ – произвольное триплетное состояние. Действительно, $M_{\text{odd}} = M'_{\text{odd}}$, и $N_{0\tilde{0}} - N'_{0\tilde{0}} = 1$ при $t = \tilde{0}$. Для $t = \pm 1$ имеем: $N_{0\tilde{0}} = N'_{0\tilde{0}}$ и $|M_{\text{odd}} - M'_{\text{odd}}| = 1$. Вместе с сопряженным элементом это единственный неисчезающий недиагональный матричный элемент, получающийся от четырехспинового циклического обмена.

В соответствии с ограничениями (3.28), налагаемыми на связи, коэффициенты J_l^s, J_l^a, K_l в (3.31) положительны. Это завершает доказательство того, что гамильтониан не имеет положительных недиагональных матричных элементов в базисе (3.29).

Гамильтониан инвариантен на каждом инвариантном подпространстве (M, σ) . Там же его матрица связана, как можно опять легко проверить. Таким образом, выполняется условие теоремы Перрона-Фробениуса, и, как следствие, относительное основное состояние является невырожденным и представляется в виде положительной суперпозиции состояний (3.17).

3.7.4 Связь с цепочкой Холдейна и самодуальный предел

Значение спина $S_{M,\sigma}$ относительного основного состояния можно выявить путем сравнения с аналогичным состоянием цепочки Холдейна, которая соответствует ограничению

$$H_{\text{Haldane}} = \sum_l \mathbf{s}_l^{(s)} \cdot \mathbf{s}_{l+1}^{(s)}$$

на состояния с триплетами на всех ступенях, что соответствует модели составного спина. На самом деле, такие состояния в (3.29) образуют неположительный базис для цепочки Холдейна [125]. Его относительное основное состояние $|\Omega\rangle_M$ в подпространстве $S^z = M$ является положительной суперпозицией всех базисных состояний и имеет максимально возможное значение спина, т. е. $|M|$, за исключением $M = 0$ при нечетных N , когда его спин равен единице. Таким образом, при $\sigma = 1$ состояния $|\Omega\rangle_{M,\sigma}$ и $|\Omega\rangle_M$ перекрываются, и, следовательно, должны иметь одинаковый спин.

Аналогично, ограничение модели составного спина на подпространство состояний с одним замороженным синглетом на последней ступени соответствует цепочке Холдейна с $N-1$ спинами. Поэтому, при $\sigma = -1$ спин состояния (3.17) совпадает со спином соответствующего состояния цепи Холдейна, которая на один узел короче. Таким образом, спин относительного основного состояния совпадает с $|M|$ кроме случая $M = 0$ и $\sigma = (-1)^{N-1}$, при котором он равен единице.

Рассмотрим отдельно предельный случай $J_l^{\parallel} = 2K_l$, когда J^a члены в (3.31) отсутствуют. Тогда $\sum_l (\mathbf{S}_l^{(s)})^2$ коммутирует с гамильтонианом и с оператором полного спина [146]. В результате группа симметрии $SU(2) \times Z_2$ расширяется до

$$SU(2) \times U(1) = U(2).$$

$U(1)$ симметрия отражает инвариантность относительно преобразований дуальности и приводит к сохранению числа синглетов N_0 [100]. Пространство (M, σ) разбивается на инвариантные подпространства с фиксированными числами синглетов, которые должны удовлетворять условию $(-1)^{N_0} = \sigma$. Гамильтониан связан на каждом таком подпространстве. Следовательно, относительное основное состояние единственно и является положительной суперпозицией состояний (3.29) с проекцией спина $S^z = M$ и N_0 синглетами на вертикальных ребрах. Сравнивая его с действием модели составного спина на состояния с синглетами на послед-

них N_0 ступенях, можно заключить, что относительное основное состояние имеет максимально возможное значение спина. Исключением является случай $M = 0$ и нечетного $N - N_0$, когда оно является триплетным состоянием. Антиферромагнитное упорядочение уровней энергии имеет место отдельно в каждом секторе с фиксированным числом синглетов и соответствует упорядочению уровней для цепочки Холдейна с $N - N_0$ спинами.

При определенных значениях констант связи полученные результаты остаются в силе и при включении диагональных взаимодействий $\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1} + \mathbf{S}_{1,l+1} \cdot \mathbf{S}_{2,l}$ в гамильтониан (3.27). Аналогичным образом можно рассмотреть и более общее биквадратное взаимодействие вида

$$K'_l(\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{1,l+1})(\mathbf{S}_{2,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1}) + 4K_l(\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l})(\mathbf{S}_{1,l+1} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1}) - 4K_l(\mathbf{S}_{1,l} \cdot \mathbf{S}_{2,l+1})(\mathbf{S}_{2,l} \cdot \mathbf{S}_{1,l+1})$$

с произвольными константами K'_l , поскольку первое слагаемое диагонально в базисе (3.29).

Глава 4

Обобщенные модели Хаббарда с дополнительной симметрией

4.1 Упорядочение энергетических уровней для $SU(N)$ симметричных квантовых систем

Как уже отмечалось в предыдущих главах, исследование различных свойств основного состояния квантовых систем многих тел является важной и актуальной проблемой физики конденсированных сред, в частности, высокотемпературной сверхпроводимости и магнетизма. Квантовые числа, связанные с различными видами симметрии и степени вырождения существенным образом характеризуют основное состояние и низкоэнергетическое поведение системы в целом.

В 1955 году Маршалл доказал, что основное состояние антиферромагнитной одномерной модели Гейзенберга спина $1/2$ кольцо с четным числом спинов является синглетом [137]. Этот результат был обобщен для произвольных значений спина и размерности [128]. Единственность основного состояния была также установлена. Для дзвухподрешеточных систем Гейзенберга Либ и Маттис доказали что основное состояние является невырожденным мультиплетом со спином, соответ-

ствующим классическому состоянию Нильса. Они доказали также, что минимальные уровни энергии при фиксированных значениях спина являются возрастающей функцией и растут вместе с ростом спина [126, 131]. Это свойство спектра известно как антиферромагнитное упорядочение уровней энергии. Обычная квантовомеханическая система одномерных взаимодействующих электронов с потенциалом взаимодействия, не зависящим от скорости и спина, также обладают свойством [127]. Этот факт известен как отсутствие одномерного ферромагнетизма.

Теорема Либ-Маттиса впоследствии была обобщена на различные спиновые и фермионные решеточные системы, такие как цепочка спина 1 с биквадратичными взаимодействиями [152], цепочка $t - J$ [213] и расширенная цепочка Хаббарда [214], двухподрешеточная модель Хаббарда на при половинном заполнении [182]. Ферромагнитное упорядочение уровней энергии цепочки Гейзенберга спина $1/2$ было установлено в работе [153]. В главе 3 антиферромагнитное упорядочение уровней энергии было установлено для фрустрированных лестниц со спином $1/2$.

В первой части данной главы сформулирован и доказан аналог этой теоремы для расширенных цепочек Хаббарда, обладающих симметрией относительно группы $SU(N)$, которая включает в себя цепочку Сазерленда с обобщенным $SU(N)$ спином. Следует отметить, что в настоящее время спиновые и фермионные модели с такой симметрией рассматриваются достаточно часто [72, 67, 168, 5]. Интерес к ним обусловлен применением в системах ультрахолодных атомов [101, 65]. Интересная классификация спиновых цепочек с симметрией $SU(N)$ на три различных типа по их низкоэнергетическому поведению была предположена в работах [67, 168]. Она обобщает аналогичную классификацию обычных спиновых цепочек с целыми и полуцелыми значениями спина [89].

4.1.1 Фермионная цепочка с $SU(N)$ симметрией.

Рассмотрим $SU(N)$ симметричную расширенную цепочку Хаббарда конечного размера, которая описывается гамильтонианом

$$H = \sum_{x,\alpha} -t_x (c_{x+1,\alpha}^+ c_{x,\alpha} + c_{x,\alpha}^+ c_{x+1,\alpha}) + V(n_1, \dots, n_L) + \sum_{x,\alpha} J_x T_x^a T_{x+1}^a - \sum_{x,\alpha>\beta} K_x (c_{x+1,\alpha}^+ c_{x+1,\beta}^+ c_{x,\beta} c_{x,\alpha} + c_{x,\alpha}^+ c_{x,\beta}^+ c_{x+1,\beta} c_{x+1,\alpha}), \quad (4.1)$$

где предполагаются открытые граничные условия $(\sum_x = \sum_{x=1}^{L-1})$. Коэффициенты t_x , J_x и K_x положительны и зависят от узла x . Существует N различных ароматов фермионов, которые нумеруются индексом α . Операторы рождения $c_{x,\alpha}^+$ и уничтожения $c_{x,\alpha}$ удовлетворяют стандартным антикоммутационным соотношениям.

В приведённом выше гамильтониане оператор

$$n_x = \sum_{\alpha} n_{x,\alpha} = \sum_{\alpha} c_{x,\alpha}^+ c_{x,\alpha}$$

задает число фермионов, находящихся в x -ом узле. Вид потенциала $V(n_1, \dots, n_L)$ не имеет значения, единственным условием является то, что он зависит только от локальных чисел заполнения фермионов в узлах. Потенциал Хаббарда

$$V(n_1, \dots, n_L) = U/2 \sum_x n_x^2$$

является его частным случаем. С точностью до оператора полного числа частиц он равен

$$U \sum_{x,\alpha>\beta} n_{x,\alpha} n_{x,\beta}.$$

Третье слагаемое описывает взаимодействие Гайзенберга для $SU(N)$ спинов (которое соответствует цепочке Сазерленда) в представлении Швингера

$$T_x^a = \sum_{\alpha,\beta} c_{x,\alpha}^+ T_{\alpha\beta}^a c_{x,\beta}, \quad a = 1, \dots, N^2 - 1 = \dim SU(N), \quad (4.2)$$

где T^a являются генераторами группы $SU(N)$ в фундаментальном (точнее, определяющем) представлении, ортогональные по отношению к следу:

$$\text{Tr } T^a T^b = \delta_{ab}.$$

Их конкретную форму можно задать, например, соотношениями (1.117), (1.118). Используя соотношение полноты для $SU(N)$ генераторов (1.131), можно переписать этот член в следующем виде [138]:

$$\begin{aligned}\sum_a T_x^a T_{x+1}^a &= \sum_{\alpha, \beta} c_{x, \alpha}^+ c_{x, \beta} c_{x+1, \beta}^+ c_{x+1, \alpha} - \frac{1}{n} n_x n_{x+1} \\ &= - \sum_{\alpha, \beta} c_{x, \alpha}^+ c_{x+1, \alpha} c_{x+1, \beta}^+ c_{x, \beta} + n_x - \frac{1}{n} n_x n_{x+1},\end{aligned}\tag{4.3}$$

Первое слагаемое соответствует обменному взаимодействию между соседними узлами [2]. Последние два члена зависят только от n_x и могут быть включены в потенциал.

Последний член в (4.1) описывает перескоки фермионных пар.

Гамильтониан сохраняет $U(1)$ суммарный заряд, который соответствует общему числу частиц

$$n = \sum_x n_x = \sum_{x, \alpha} c_{x, \alpha}^+ c_{x, \alpha}\tag{4.4}$$

и совместим с $SU(N)$ генераторами

$$T^a = \sum_x T_x^a = \sum_{x, \alpha, \beta} c_{x, \alpha}^+ T_{\alpha\beta}^a c_{x, \beta}.\tag{4.5}$$

Общая симметрия данной системы задается группой $U(N) = SU(N) \times U(1)$. Повышающие спин, понижающие спин и диагональные генераторы задаются соответственно верхне-треугольными, нижне-треугольными и диагональными матрицами. Соответствующий базис имеет вид

$$F^{\alpha\beta} = \sum_x c_{x, \alpha}^+ c_{x, \beta}, \quad F^{\alpha\alpha} = \sum_x n_{x, \alpha}.\tag{4.6}$$

В данная система является обобщением $SU(2)$ симметричного гамильтониана, для которой теорема Либ-Маттиса была установлена и проверена ранее в работе [214]. При потенциале Хаббарда первые три слагаемых гамильтониана (4.1) соответствуют $SU(N)$ симметричной цепочке Хаббарда-Гайзенберга введённой в [138]. Для случая $SU(4)$ симметрии и при отсутствии членов, соответствующих

парным перескокам фермионов и гайзенберговскому взаимодействию, были доказаны невырожденность основного состояния и наличие бесцелевых возбуждений [123].

Каждый узел в гамильтониане (4.1) имеет 2^N различных состояний с числом фермионов от нуля до N . В соответствии с (4.2), или (4.6), одночастичные состояния $c_\alpha^+|0\rangle$ образуют определяющее представление группы $U(N)$. Аналогично, благодаря антикоммутации фермионных операторов, многочастичные состояния $c_{\alpha_1}^+ \dots c_{\alpha_k}^+|0\rangle$ составляют $\binom{N}{k}$ -мерное антисимметричное представление. Оно является синглетами при $k = 0, N$, которые соответствуют вакуумному $|0\rangle$ и полностью заполненным состояниям.

В этой главе мы сформулируем и докажем обобщенную теорему Либа-Маттиса для описанной системы. Во-первых, мы построим базис, в котором все ненулевые недиагональные матричные элементы гамильтониана отрицательны. Далее мы ограничимся на подпространства, где матрица гамильтониана связана. По теореме Перрона-Фробениуса это означает, что наинизшее энергетическое состояние является невырожденным и положительным. Затем, используя это свойство, основное состояние сравнивается с простыми состояниями, чтобы выявить характер мультиплета, в котором он содержится. Наконец, используя теорию представлений группы $SU(N)$, мы выражаем упорядочение наинизших уровней энергии различных мультиплетов через так называемый доминантный порядок соответствующих диаграмм Юнга.

4.1.2 Отрицательный базис

Естественный базис для гамильтониана (4.1) образуется состояниями с фиксированными положениями частиц. Координаты задаются множеством $\{x^\alpha\}_{\alpha=1}^N$, состо-

ящим из N подмножеств. Каждое подмножество

$$\{x^\alpha\} = \{x_1^\alpha, \dots, x_{M_\alpha}^\alpha | x_1^\alpha < \dots < x_{M_\alpha}^\alpha\}$$

задает положение фермионов определенного аромата α , а $M_\alpha = \#\{x^\alpha\}$ – их количество. Обозначим через $M = \sum_\alpha M_\alpha$ общее число частиц. Оказывается, что знаковый фактор каждого состояния может быть выбран таким образом, чтобы ненулевые недиагональные элементы гамильтониана стали бы отрицательными.

Во-первых, следуя (4.1) и (4.3), заметим, что недиагональная часть соответствует обмену соседних фермионов $c_{x\pm 1, \alpha}^+ c_{x, \alpha}$ и их произведениям. Благодаря соответствующему выбору знаков в константах $-t_x$, $-K_x$ и J_x , положительное значение всех ненулевых матричных элементов этих обменных взаимодействий влечет за собой неположительные значения для всех недиагональных матричных элементов гамильтониана. Правильный знаковый множитель можно получить, просто упорядочив определенным образом операторы рождения фермионов:

$$|\{x^1\}, \dots, \{x^N\}\rangle = \prod_{\alpha=1}^N (c_{x_1^\alpha, \alpha}^+ c_{x_2^\alpha, \alpha}^+ \dots c_{x_{M_\alpha}^\alpha, \alpha}^+) |0\rangle, \quad (4.7)$$

где произведение берется слева направо. Другими словами, мы группируем вместе частицы одного и того же аромата, а внутри одной группы располагаем их в соответствии с их положением. Благодаря статистике Ферми-Дирака, обменный член $c_{x\pm 1, \alpha}^+ c_{x, \alpha}$ действует нетривиально на состояния, имеющие только один α -фермион в двух соседних узлах. В этом случае он переводит его в подобное состояние (4.7), где оператор $c_{x, \alpha}^+$ просто замещается оператором $c_{x\pm 1, \alpha}^+$ без какого-либо дополнительного знакового множителя. Таким образом, недиагональные матричные элементы гамильтониана (4.1) в приведенном выше базисе не являются положительными.

Базис (4.7) был использован ранее для изучения вырождения основного состояния. Он был введен Афлеком и Либом при построении отрицательного базиса для цепочки Сазерленда [2]. Явное выражение, похожее на (4.7), было приведено

для расширенной $t - J$ модели и $SU(2)$ симметричной модели Хаббарда в [213, 214], где он был применен для доказательства теоремы Либа-Маттиса. Для многокомпонентной модели $t - J$ с $SU(N_b) \times SU(N_f)$ симметрией, аналогичный базис обеспечивает невырожденность относительных основных состояний [13]. В $SU(4)$ модели Хаббарда он был использован для изучения и доказательства теоремы Либа-Шульца-Маттиса о безмассовом характере спектра для определенных мультиплетов [123].

Было бы интересно извлечь знаковый фактор, который закодирован в особом упорядочении фермионных операторов в (4.7), в частном случае модели Сазерленда. Следует отметить, что взаимодействие Гайзенберга сохраняет число частиц в каждом узле. Поэтому он естественным образом ограничивается на меньшее подпространство состояний, где каждый узел содержит только одну из $N - 1$ фундаментальных (антисимметричных) представлений группы $SU(N)$. Легко выразить базисные состояния (4.7) через обычный изинговский базис для спинов. Предположим для простоты, что на каждом узле имеется один фермион, что соответствует определяющему N -мерному представлению. Тогда обычный базис Изинга (Поттса) принимает следующий вид:

$$|\alpha_1, \dots, \alpha_L\rangle = c_{1,\alpha_1}^+ c_{2,\alpha_2}^+ \dots c_{L,\alpha_L}^+ |0\rangle. \quad (4.8)$$

Обменное взаимодействие Гайзенберга (4.3) действует на них посредством

$$\sum_a T_x^a T_{x+1}^a = P_{x,x+1} - \frac{1}{n},$$

где $P_{x,y}$ – перестановка двух соседних состояний. Состояния (4.7) получаются из (4.8) перестановкой фермионных операторов. Поскольку фермионы одного и того же аромата уже упорядочены по координатам (4.7), получаем:

$$|\{x^1\}, \dots, \{x^N\}\rangle = (-1)^{p_{\alpha_1 \dots \alpha_L}} |\alpha_1, \dots, \alpha_L\rangle, \quad p_{\alpha_1 \dots \alpha_L} = \{ \#(x < y) \mid \alpha_x > \alpha_y \}.$$

Здесь $p_{\alpha_1 \dots \alpha_L}$ задает число инверсий в последовательности. Базис такого вида был

использован в исследовании цепочек Гайзенберга, обладающих высшими симметриями [72, 124].

Стоит отметить, что для систем с зеркальной симметрией существует другой подход, который коротко можно охарактеризовать как положительность по отношению к отражению. Его можно применять для более широкого класса систем, как фрустрированные спиновые модели [131, 132, 182]. Отражение спина на половине решетки выполняется для того, чтобы построить новый базис для спиновых состояний, где функция основного состояния становится положительным. Этот метод является проблематичным для $SU(N)$ спинов более высокого ранга, так как большинство мультиплетов, в том числе и определяющий, не инвариантно относительно отражения. В результате необходимо использовать либо отраженное (или сопряженное) представление для половины решетки, либо ограничиться самосопряженными. Оба случая нами не рассматриваются.

4.1.3 Относительные основные состояния

Гамильтониан инвариантен на любом подпространстве M_α , которое образуют состояния (4.7) с фиксированными числами фермионов каждого типа. Его можно рассматривать и как весовое подпространство относительно действия $U(N)$. Вес задается совокупностью $\{M_\alpha\}_{\alpha=1}^N$, состоящей из собственных значений диагональных генераторов (4.6). Отметим, что согласно статистике Ферми-Дирака размер цепочки должен быть достаточным для того, чтобы содержать все частицы:

$$L \geq \max_{1 \leq \alpha \leq N} M_\alpha. \quad (4.9)$$

Это и есть условие существования M_α -подпространства для цепочки длины L .

Легко видеть, что любые два базисных состояния из одного подпространства связаны друг с другом кинетическими членами гамильтониана (т. е. переходят друг в друга последовательным их применением). Тогда, согласно теореме Перрона-

Фробениуса [117],

- Относительное основное состояние гамильтониана в любом подпространстве M_α является единственным, и все его коэффициенты разложения по базису (4.7) строго положительны:

$$\Omega_{M_1 \dots M_N} = \sum_{\substack{\{x^1\}, \dots, \{x^N\} \\ \#\{x^\alpha\} = M_\alpha}} \omega_{\{x^1\} \dots \{x^N\}} |\{x^1\}, \dots, \{x^N\}\rangle, \quad \omega_{\{x^1\} \dots \{x^N\}} > 0. \quad (4.10)$$

Положительность может быть использована для того, чтобы выявить тип $U(N)$ мультиплета, который содержит относительное основное состояние. Из базисных состояний (4.7) мы выбираем пробное состояние $\Psi_{M_1 \dots M_N}$, где фермионы каждого аромата последовательно занимают узлы, начиная с первого:

$$\Psi_{M_1 \dots M_N} = \prod_{\alpha=1}^N (c_{1,\alpha}^+ c_{2,\alpha}^+ \dots c_{M_\alpha,\alpha}^+) |0\rangle. \quad (4.11)$$

Для полноты картины мы приводим ниже на языке фермионов некоторые аспекты теории представлений унитарных групп, которые будут играть важную роль в последующем обсуждении. Неприводимые представления группы $U(N)$ классифицируются диаграммами Юнга $\mathbb{Y}$ с не более чем N строками [94]. Каждый квадратик (элемент) в диаграмме $\mathbb{Y}$ связан с одной частицей, а их количество равно числу частиц. Симметризуем ароматы по строкам и антисимметризуем по столбцам, оставляя пространственные координаты фиксированными. Состояния, построенные таким образом из всех возможных распределений ароматов по элементам диаграммы $\mathbb{Y}$, образуют неприводимое представление (мультиплет) унитарной группы. Состояния, где ароматы не убывают по строкам слева направо и увеличиваются по столбцам сверху вниз, образуют стандартный базис мультиплета. Среди них есть единственное состояние, обладающее наибольшим весом, в котором i -ая строка заполняется частицами с ароматом $\alpha = i$. Его зануляют все повышающие генераторы (4.6).

В случае двух частиц, расположенных в узлах $x \neq y$, вышеупомянутая процедура дает симметричный и антисимметричный мультиплеты:

$$(c_{x,\alpha}^+ c_{y,\beta}^+ + c_{x,\beta}^+ c_{y,\alpha}^+) |0\rangle = \boxed{x\alpha} \boxed{y\beta}, \quad (c_{x,\alpha}^+ c_{y,\beta}^+ - c_{x,\beta}^+ c_{y,\alpha}^+) |0\rangle = \frac{x\alpha}{y\beta}.$$

Номер узла цепочки задается в верхнем левом углу квадратика. Так как мы имеем дело с фермионами, все узлы в той же строке должны быть различны, чтобы получилось нетривиальное состояние. Для следующего состояния $SU(N)$ спины в скобках симметризованы, а соответствующие спины каждой группы антисимметризованы, что приводит к представленной таблице Юнга:

$$(c_{x,\alpha}^+ c_{y,\beta}^+ c_{z,\gamma}^+) (c_{x,\mu}^+ c_{z,\nu}^+) c_{x,\delta}^+ |0\rangle \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline x\alpha & y\beta & z\gamma \\ \hline x\mu & z\nu & \\ \hline x\delta & & \\ \hline \end{array}. \quad (4.12)$$

Обратим внимание, что симметризация по строке тривиальна, если она содержит только частицы одного вида как, например, для состояния старшего веса. Это произойдет с первой строкой приведенной выше таблицы, если $\alpha = \beta = \gamma$. Кроме того, антисимметризации по столбцам тривиальны, если его частицы находятся на одном и том же узле как, например, в первом столбце (4.12).

Рассмотрим теперь пробное состояние $\Psi_{M_1 \dots M_N}$. Построим таблицу Юнга со длинами строк, задаваемыми множеством $\{M_\alpha\}$, j -ая строка которой содержит частицы, расположенные на j -м узле. Заполним первую строку фермионами вида α_1 , где M_{α_1} – наибольшее число из набора, вторую строку – фермионами вида α_2 , где M_{α_2} является вторым по величине числом, и так далее. Как отмечалось выше, все процедуры симметризации-антисимметризации тривиальны для этого состояния. Поэтому пробное состояние (4.11) действительно соответствует построенной таблице Юнга и принадлежит мультиплету, который описывается аналогичной схемой Юнга. Заметим, что, как и Ферми-состояние, оно является наиболее компактным, занимая M_{α_1} узлов, и благодаря (4.9) существует для любого M_α -подпространства. Поэтому состояние (4.11) принадлежит мультиплету,

связанному с построенной диаграммой Юнга. Отметим, что базисное состояние (4.7) общего вида может и не быть частью одного мультиплета. Ниже приведены примеры пробных состояний для $SU(3)$ цепочки:

$$\Psi_{3,2,1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1_1 & 2_1 & 3_1 \\ \hline 1_2 & 2_2 & \\ \hline 1_3 & & \\ \hline \end{array}, \quad \Psi_{2,3,1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1_2 & 2_2 & 3_2 \\ \hline 1_1 & 2_1 & \\ \hline 1_3 & & \\ \hline \end{array}, \quad \Psi_{2,0,4} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1_3 & 2_3 & 3_3 & 4_3 \\ \hline 1_1 & 2_1 & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array}.$$

В первом состоянии первый узел цепочки заполнен полностью, образуя синглет, второй узел имеет два фермиона с $\alpha = 1, 2$, а третий занят одним фермионом с $\alpha = 1$. Остальные узлы пустуют.

Благодаря $U(N)$ симметрии и ортогональности неэквивалентных представлений, проекции $\Omega_{M_1 \dots M_N}$ на различные секторы, соответствующие неэквивалентным мультиплетам, определяют ортогональные состояния с той же энергией. Благодаря же единственности относительного основного состояния, последнее должно принадлежать только одному сектору. Согласно (4.10), базисное состояние $\Psi_{M_1 \dots M_N}$ участвует в разложении относительно основного состояния $\Omega_{M_1 \dots M_N}$ и, следовательно, перекрывается с ним, т. е. эти состояния не ортогональны друг другу. Таким образом, оба они принадлежат эквивалентным мультиплетам. Мы заключаем, что

- Относительное основное состояние в подпространстве M_α принадлежит неприводимому представлению группы $U(N)$, которое характеризуется диаграммой Юнга $\mathbb{Y}_{M_\alpha}$ со строками, длины которых задаются ненулевыми значениями из набора $\{M_\alpha\}$.

4.1.4 Упорядочение энергетических уровней

Благодаря $U(N)$ симметрии гамильтониан расширенной цепочки Хаббарда (4.1) инвариантен на отдельных секторах, которые объединяют эквивалентные представления. Эти секторы нумеруются диаграммами Юнга. Количество квадрати-

ков в них задает квантовое число $U(1)$ подгруппы и соответствует общему числу частиц.

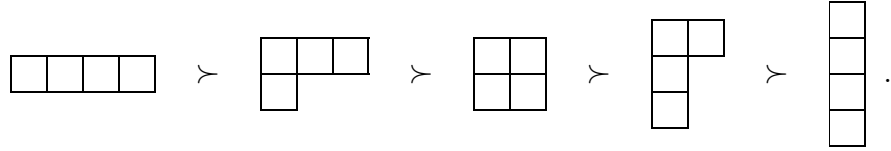
Обозначим через $E(\mathbb{Y})$ наинизший уровень энергии среди всех мультиплетов одного класса эквивалентности $\mathbb{Y}$. На самом деле, именно относительное основное состояние $\Omega_{M_1 \dots M_N}$ имеет наименьшую энергию $E(\mathbb{Y}_{M_\alpha})$, потому что любой $\mathbb{Y}_{M_\alpha}$ мультиплет имеет свое представительство в соответствующем подпространстве M_α . Невырожденность уровня $E(\mathbb{Y}_{M_\alpha})$ следует непосредственно из единственности относительного основного состояния.

Заметим, что относительные основные состояния всех тех подпространств M'_α , которые получаются всевозможными перестановками одного набора $\{M_\alpha\}$, соответствуют одной и той же схеме Юнга. В действительности все они являются членами одного и того же $\mathbb{Y}_{M_\alpha}$ мультиплета [72]. Этот факт отражает дискретную симметрию гамильтониана по отношению к симметрической группе S_N перестановок N ароматов, которая является дискретной подгруппой унитарной группы. Таким образом, можно рассматривать, не теряя общности, только подпространства M_α с невозрастающими последовательностями: $M_1 \geq \dots \geq M_N$. Соответствующие относительные основные состояния являются старшими состояниями для мультиплета $\mathbb{Y}_{M_\alpha}$ с наинизшей энергией.

Рассмотрим две различные диаграммы Юнга $\mathbb{Y}_{M_\alpha}$ и $\mathbb{Y}_{M'_\alpha}$ и попытаемся сравнить соответствующие минимальные энергии. Предположим, что старший вес первого мультиплета является также весом (очевидно, не старшим) второго. Это означает, что неприводимое представление, порожденное относительным основным состоянием $\Omega_{M'_1 \dots M'_N}$, имеет своего представителя в подпространстве M_α . Конечно, оба состояния отличаются. Тогда в силу единственности относительного основного состояния этот представитель вместе со своим мультиплетом имеет более высокую энергию, чем $\Omega_{M_1 \dots M_N}$, то есть $E(\mathbb{Y}_{M'_\alpha}) > E(\mathbb{Y}_{M_\alpha})$.

Последнее соотношение определяет некоторое упорядочение среди представ-

лений, которое может быть сформулировано в элегантной манере через вид диаграмм Юнга. Именно, в данном случае $\mathbb{Y}_{M_\alpha}$ может быть получена из $\mathbb{Y}_{M'_\alpha}$ смещением некоторых ее квадратиков с верхних строк в нижние. Данное соотношение между диаграммами коротко обозначим как $\mathbb{Y}_{M'_\alpha} \succ \mathbb{Y}_{M_\alpha}$ [72]. В теории представлений симметрической группы этот порядок называется доминантным [134]. Например, для унитарной группы с $N \geq 4$ имеем:



Доминантный порядок является частичным. Есть диаграммы Юнга, которые нельзя сравнивать (при $N > 2$ и $M > 5$), как, к примеру, диаграммы  и . Диаграммы Юнга с различным количеством элементов вообще не сравниваются.

Таким образом, мы доказали, что для расширенной модели Хаббарда (4.1)

- Минимальные уровни энергии секторов, которые характеризуются различными диаграммами Юнга, удовлетворяют доминантному порядку

$$E(\mathbb{Y}_2) > E(\mathbb{Y}_1) \quad \text{if} \quad \mathbb{Y}_2 \succ \mathbb{Y}_1; \quad (4.13)$$

- Уровни $E(\mathbb{Y})$ не вырождены, если не учитывать вырождение внутри одного мультиплета группы $SU(N)$.

Эти результаты согласуются с результатами, полученными для частного случая $SU(2)$ симметрии в работе [214]. В этом случае диаграмма Юнга соответствует спинovому квантовому числу S , и имеет место обычный антиферромагнитный порядок Либ-Маттиса: $E(S_2) > E(S_1)$ при $S_2 > S_1$ [126], который подробно описан в главе 3. В пределе же, где присутствует только спиновое взаимодействие Гайзенберга, система сводится к известной цепочке Сазерленда [195]. Аналогичные правило справедливо и для этой системы, как показано в нашей работе [72].

Похожее упорядочение возникало уже в одномерной многочастичной квантовой механике, где Либ и Маттис сравнивали минимальные энергии волновых

функций с различными перестановочными симметриями [127]. Это не удивительно, так как эти классы симметрии также описываются диаграммами Юнга. Принцип сравнения диаграмм, полученный в [127], является обратной версией рассмотренного нами упорядочения (см. (4.18) ниже). Мы ниже в данной главе мы покажем, что для фермионов с $SU(N)$ спиновыми степенями свободы пространственные и спиновые части фермионной волновой функции описываются взаимно сопряженными диаграммами Юнга. Это приводит к прямому порядку для спинов в согласии с нашими результатами.

4.2 Основное состояние цепочки

Несмотря на то, что доминантный порядок является частичным, среди всех диаграмм $\mathbb{Y}$, содержащих одинаковое число элементов, существует наименьшая диаграмма $\mathbb{Y}_{\text{gs}}$, которая соответствует основному состоянию: $\mathbb{Y} \succ \mathbb{Y}_{\text{gs}}$. Все столбцы в $\mathbb{Y}_{\text{gs}}$ имеют максимально-возможную длину N кроме последнего, длина которого равна

$$m = M \bmod N, \quad (4.14)$$

где M – общее количество элементов диаграммы. Очевидно, $\mathbb{Y}_{\text{gs}}$ соответствует антисимметричному представлению m -го порядка. В соответствии с правилом упорядочения (4.13), сектор, определяемый $\mathbb{Y}_{\text{gs}}$, имеет минимальную энергию среди других секторов. Таким образом,

- Основное состояние расширенной цепочки Хаббарда (4.1) с M частицами образует невырожденный $\binom{N}{m}$ -мерный антисимметричный $SU(N)$ мультиплет.
- В частности, если число частиц кратно N , то основное состояние является невырожденным синглетом.

В случае $SU(2)$ симметрии основное состояние является спиновым синглетом для четного числа частиц, а для нечетного числа – дублетом в согласии с результатами в работе [214]. Для $SU(3)$ симметричной модели основное состояние является синглетом, трехмерным определяющим представлением $\mathbf{3}$, или комплексно сопряженным к нему представлением $\bar{\mathbf{3}}$ в зависимости от значения m в (4.14). Ниже оно представлено для шести, семи, и восьми частиц:

$$\mathbb{Y}_{\text{gs}}^{\mathbf{0}} = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \mathbb{Y}_{\text{gs}}^{\mathbf{3}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad \mathbb{Y}_{\text{gs}}^{\bar{\mathbf{3}}} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}. \quad (4.15)$$

Заметим, что описанным методом нельзя сравнивать основные состояния, имеющие разное количество частиц.

Рассмотрим теперь случай точно-решаемой модели свободных фермионов, когда в гамильтониане (4.1) остаётся лишь кинетический член, при периодических граничных условиях. Последние в общем случае нарушают условия теоремы, но в целом картина оказывается идентичной той, которая наблюдается для системы со свободными границами. В импульсном представлении собственные значения энергии равны с точностью до постоянного слагаемого:

$$\varepsilon_k = 4t \sin^2 \frac{\pi k}{L},$$

где $0 \leq k \leq L - 1$ определяет импульс. Здесь имеется двукратное вырождение по импульсу $\varepsilon_k = \varepsilon_{L-k}$ кроме значения $k = 0$ в связи с инвариантностью при отражении. Естественно, остаётся также N -кратное вырождение по квантовым числам, отвечающим за аромат. В основном состоянии с M частицами все нижние уровни ε_k полностью заполнены фермионами N различных ароматов вплоть до уровня Ферми, соответствующего k_f , который заполнен частично $m = M - (2k_f - 1)N$ частицами при $k_f > 0$. Полностью заполненные уровни образуют, конечно, синглеты, а Ферми уровень – m -го порядка антисимметричный мультиплет. Эта картина совпадает с общей картиной при наличии указанных взаимодействий.

Для основных состояний, приведённых в (4.15), вышеуказанное заполнение уровня Ферми системы описывается следующими таблицами:

$$\Omega_{\text{gs}}^0 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1_1 & 2_1 \\ \hline 1_2 & 2_2 \\ \hline 1_3 & 2_3 \\ \hline \end{array}, \quad (\Omega_{\text{gs}}^{\mathbf{3}})_{\alpha} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1_1 & 2_1 & 3_{\alpha} \\ \hline 1_2 & 2_2 & \\ \hline 1_3 & 2_3 & \\ \hline \end{array}, \quad (\Omega_{\text{gs}}^{\bar{\mathbf{3}}})_{\alpha\beta} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1_1 & 2_1 & 3_{\alpha} \\ \hline 1_2 & 2_2 & 3_{\beta} \\ \hline 1_3 & 2_3 & \\ \hline \end{array}.$$

Поскольку мы работаем в импульсном представлении, то число, помеченное в верхнем левом углу каждого квадратика соответствует уровню энергии k , а не пространственному положению, как раньше. Числа α, β являются $SU(3)$ ароматами, которые нумеруют три состояния мультиплета.

Аналогично можно построить и относительные основные состояния $\Omega_{M_1 \dots M_N}$. Сначала берем наибольшее число M_{α} из этого набора и заполняем первый уровень M_{α} фермионами аромата α , затем берем следующее за ним число M_{β} и заполняем второй уровень M_{β} фермионами аромата β , и так далее. Это состояние похоже на пробное состояние (4.11), использованное для обнаружения представления $\Omega_{M_1 \dots M_N}$ для взаимодействующей системы. Разница лишь в том, что опять, вместо координат необходимо использовать уровень энергии. Мультиплетная структура этих состояний остается неизменной. Относительное основное состояние невзаимодействующей системы может быть использовано в качестве пробного состояния вместо (4.11), как это было сделано для $SU(2)$ модели Хаббарда [127, 214]. В самом деле, оно не ортогонально аналогичному состоянию взаимодействующей системы, так как оба они положительны в базисе (4.7) [см. (4.10)].

4.3 Упорядочение энергетических уровней для квантово-механической системы с $SU(N)$ фермионами

Рассмотрим квантово-механическую систему одномерных идентичных фермионов с $SU(N)$ внутренними степенями свободы и взаимодействием, зависящим только

от пространственных координат:

$$H_{QM} = -\frac{1}{2m} \sum_{i=1}^M \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + V(x_1, \dots, x_M). \quad (4.16)$$

Потенциал инвариантен при перестановке частиц. Для случая симметрии $SU(2)$ Либ и Маттис доказали, что имеет место антиферромагнитное упорядочение энергетических уровней [127] (см. также [142]). В этом параграфе мы обобщим их результат для более высокой унитарной симметрии и обсудим связь с результатами, полученными в предыдущих разделах.

Для различных частиц пространственные и спиновые степени свободы полностью разделяются. Стационарные состояния являются произведениями пространственной и спиновой частей, а спектр определяется пространственной волновой функцией. Благодаря инвариантности гамильтониана H_{QM} при перестановке частиц пространственные собственные функции классифицируются по их симметрии относительно перестановки $\mathcal{S}_M^{\text{space}}$ пространственных координат. Согласно теории представлений симметрической группы, классы симметрии описываются диаграммами Юнга $\mathbb{Y}'$ [127, 118, 94]. Всякое распределения координат вдоль квадратилов определяет процедуру симметризации-антисимметризации, аналогичную $SU(N)$ случаю. Определённый таким образом оператор является проектором, а проекторы, построенные из различных диаграмм Юнга, взаимно ортогональны. Волновая функция $\phi_{\mathbb{Y}'}(x_1, \dots, x_M)$ имеет тип симметрии $\mathbb{Y}'$, если соответствующий проектор не меняет ее. Она порождает неприводимое представление симметрической группы. Стандартный базис соответствует распределениям, в которых индексы растут вдоль строк слева направо и вдоль столбцов сверху вниз. Полностью симметричные и антисимметричные представления одномерны и описываются одной строкой и одним столбцом соответственно, другие представления имеют более высокие размеры.

Функция $\phi_{\mathbb{Y}'}(x_1, \dots, x_M)$ антисимметрична по переменным, относящимся к од-

ному столбцу и удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\left[1 - \sum_{j: \text{col}(j)=c} P_{ij} \right] \phi_{\mathbb{Y}'}(x_1, \dots, x_M) = 0 \quad \text{для любого } i \text{ при условии } \text{col}(i) > c. \quad (4.17)$$

Здесь $\text{col}(i)$ является индексом столбца в $\mathbb{Y}'$, содержащим x_i , они считаются слева направо. P_{ij} переставляет x_i и x_j . Эти соотношения означают, что антисимметризация переменных в столбце с любой переменной, расположенной справа, должна обнулиться, так как она уже симметризована с некоторой переменной из этого же столбца проектором Юнга.

Обозначим теперь через $E(\mathbb{Y}')$ минимальный уровень энергии среди состояний, которые относятся к классу симметрии, определяемым $\mathbb{Y}'$. Эти уровни не вырождены, если не учитывать перестановки координат, и удовлетворяют следующему правилу упорядочения [127]:

$$E(\mathbb{Y}'_1) > E(\mathbb{Y}'_2) \quad \text{если} \quad \mathbb{Y}'_1 \prec \mathbb{Y}'_2. \quad (4.18)$$

В частности, наивысший уровень энергии полностью антисимметричен по пространственным координатам, а наинизший уровень – полностью симметричен. Здесь и в последующем $\phi_{\mathbb{Y}'}$ будет использовано для обозначения наинизшего состояния с $\mathbb{Y}'$ симметрией.

Для тождественных фермионов в соответствии с принципом Паули волновая функция всей системы должна быть антисимметричной при перестановке отдельных частиц. Это может быть достигнуто путем выбора соответствующих спинных волновых функций. Для симметричной пространственной части спиновая часть должна быть антисимметричной, и наоборот. Для более общих классов симметрии, полная волновая функция является суперпозицией произведения спина и пространственных функций. Общая конструкция задается с помощью теории представлений.

Гамильтониан (4.16) обладает унитарной $SU(N)$ и перестановочной $\mathcal{S}_M^{\text{spin}}$ сим-

метриями, которые действуют на спинорные переменные и взаимно независимы. Представления обеих групп классифицируются диаграммами Юнга $\mathbb{Y}$ с M квадратами и не более чем N строками. Благодаря дуальности Шура-Вейля, их совместное действие разлагается в прямую сумму тензорных произведений неприводимых модулей:

$$\sum_{\mathbb{Y}} \pi_{\mathbb{Y}} \otimes \rho_{\mathbb{Y}}.$$

Здесь $\pi_{\mathbb{Y}}$ и $\rho_{\mathbb{Y}}$ являются неприводимыми представлениями $\mathcal{S}_M^{\text{spin}}$ и $SU(N)$ соответственно. Это свойство предполагает, в частности, что старший вес векторов всех $SU(N)$ мультиплетов вида $\rho_{\mathbb{Y}}$ образует неприводимое представление группы $\mathcal{S}_M^{\text{spin}}$ класса $\pi_{\mathbb{Y}}$. Кроме того, действие общей группы симметрии

$$\mathcal{S}_M^{\text{space}} \times \mathcal{S}_M^{\text{spin}} \times SU(N)$$

на все пространство состояний разлагается согласно

$$\sum_{\mathbb{Y}', \mathbb{Y}} \pi_{\mathbb{Y}'} \otimes \pi_{\mathbb{Y}} \otimes \rho_{\mathbb{Y}}. \quad (4.19)$$

Здесь $\pi_{\mathbb{Y}'}$ – (единственное) неприводимое представление симметрической группы, образованное пространственными волновыми функциями с минимальной энергией, обладающих симметрией класса $\mathbb{Y}'$.

Физическое пространство состояний в нашем случае соответствует подпространству в (4.19), образованному антисимметричными волновыми функциями. Он является антисимметричным представлением симметрической группы, соответствующему образу диагонального гомоморфизма

$$\mathcal{S}_M \mapsto \mathcal{S}_M^{\text{space}} \times \mathcal{S}_M^{\text{spin}}.$$

Представление $\pi_{\mathbb{Y}'} \otimes \pi_{\mathbb{Y}}$ можно рассматривать как тензорное (или кронекеровское) произведение двух $\mathcal{S}_M$ модулей.

Согласно теории представлений симметрической группы антисимметричное представление возникает только в тензорном произведении двух сопряженных

представлений, в то время как симметричное представление – в произведении двух эквивалентных представлений [127, 94]. Их кратности равны единице. Сопряженные диаграммы Юнга $\mathbb{Y}$ и $\tilde{\mathbb{Y}}$ являются отражениями друг друга относительно главной диагонали, то есть строки (столбцы) в $\mathbb{Y}$ заменены на столбцы (строки) из $\tilde{\mathbb{Y}}$ и наоборот. Оба представления имеют одинаковую размерность, и одно получается из другого умножением на антисимметричное представление.

Итак, только члены с $\mathbb{Y}' = \tilde{\mathbb{Y}}$ важны для фермионных состояний в сумме (4.19). Извлекая их и применяя формальный ряд Клебша-Гордана, мы придем к равенству:

$$\sum_{\mathbb{Y}} \pi_{\tilde{\mathbb{Y}}} \otimes \pi_{\mathbb{Y}} \otimes \rho_{\mathbb{Y}} = \sum_{\mathbb{Y}} \left[\pi_{\text{asym}}^{\tilde{\mathbb{Y}} \times \mathbb{Y}} \otimes \rho_{\mathbb{Y}} + \sum_{\mathbb{Y}' \neq \text{asym}} \pi_{\mathbb{Y}'}^{\tilde{\mathbb{Y}} \times \mathbb{Y}} \otimes \rho_{\mathbb{Y}} \right]. \quad (4.20)$$

Таким образом, фермионные волновые функции, построенные из $\phi_{\tilde{\mathbb{Y}}}$, образуют один $SU(N)$ мультиплет вида $\rho_{\mathbb{Y}}$. Его старшее состояние $\Phi_{\text{asym}}^{\tilde{\mathbb{Y}} \times \mathbb{Y}}$ имеет простую каноническую форму, которое было использовано для $SU(2)$ фермионов в [127].

Пусть M_i – длина i -й строки в диаграмме $\mathbb{Y}$. Предположим для определенности, что первые M_1 переменные $\phi_{\tilde{\mathbb{Y}}}(x_1, \dots, x_M)$ расположены в первом столбце в порядке убывания индекса, вторые M_2 – во втором столбце и так далее. Тогда (с точностью до нормирующего множителя):

$$\Phi_{\text{asym}}^{\tilde{\mathbb{Y}} \times \mathbb{Y}} = \sum_{P \in \mathcal{S}_M} (-1)^P \pi_{\tilde{\mathbb{Y}}}(P) \phi_{\tilde{\mathbb{Y}}}(x_1, \dots, x_M) \pi_{\mathbb{Y}}(P) | \underbrace{1 \dots 1}_{M_1} \underbrace{2 \dots 2}_{M_2} \dots \underbrace{N \dots N}_{M_N} \rangle. \quad (4.21)$$

Он относится к кронекеровскому произведению $\pi_{\tilde{\mathbb{Y}}} \otimes \pi_{\mathbb{Y}}$ и не обращается в нуль, так как коэффициент перед упорядоченным спинным состоянием пропорционален $\phi_{\tilde{\mathbb{Y}}}(x_1, \dots, x_M)$. Из-за знакового множителя $(-1)^P$ (четность перестановки P), данное состояние полностью антисимметрично при перестановке двух частиц. Наконец, его $SU(N)$ вес совпадает с максимальным весом $\rho_{\mathbb{Y}}$. Из единственности состояния мы заключаем, что выражение (4.21) является правильным.

То, что волновая функция (4.21) является старшим состоянием, т. е. повышающие спин генераторы (приведенные в (4.6), $\alpha < \beta$) уничтожают его, может быть

проверено независимо прямым вычислением. Ниже мы продемонстрируем это на примере F^{12} . Для других генераторов это условие проверяется аналогично.

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathbb{Y}}(F^{12})\Phi_{\text{asym}}^{\tilde{\mathbb{Y}} \times \mathbb{Y}} &= \sum_{P \in \mathcal{S}_M} (-1)^P P \phi_{\tilde{\mathbb{Y}}}(x_1, \dots, x_M) \sum_{i=M_1+1}^{M_2} P \mathcal{F}_i^{12} |\underbrace{1 \dots 1}_{M_1} \underbrace{2 \dots 2}_{M_2} \dots \rangle \\
&= \sum_{P \in \mathcal{S}_M} (-1)^P P \phi_{\tilde{\mathbb{Y}}}(x_1, \dots, x_M) P \left[1 + \sum_{i=M_1+2}^{M_2} P_{M_1+1 i} \right] |\underbrace{1 \dots 1}_{M_1+1} \underbrace{2 \dots 2}_{M_2-1} \dots \rangle \\
&= \sum_{P \in \mathcal{S}_M} (-1)^P P \left[1 - \sum_{i=M_1+2}^{M_2} P_{M_1+1 i} \right] \phi_{\tilde{\mathbb{Y}}}(x_1, \dots, x_M) P |\underbrace{1 \dots 1}_{M_1+1} \underbrace{2 \dots 2}_{M_2-1} \dots \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Здесь матрица $\mathcal{F}_i^{12}$ действует на i -й спин. В первом уравнении мы использовали коммутативность унитарной и симметрической групп. Второе уравнение использует определение $\mathcal{F}^{12}$ в (4.6). В третьем уравнении мы изменили индекс суммирования $\left[\sum_P \rightarrow \sum_{PP_{M_1+1 i}} \right]$, который изменяет также знак в квадратных скобках, поскольку $(-1)^{PP_{M_1+1 i}} = -(-1)^P$. Последнее уравнение в (4.22) является следствием соотношений (4.17).

Таким образом, мы приходим к выводу, что спиновая и пространственная части фермионной волновой функции описываются сопряженными диаграммами Юнга. Ясно, что сопряжение переворачивает доминантный порядок: если $\mathbb{Y}_1 \succ \mathbb{Y}_2$, то $\tilde{\mathbb{Y}}_1 \prec \tilde{\mathbb{Y}}_2$ и наоборот [127]. Таким образом, в терминах $SU(N)$ представлений, обратное правило упорядочения (4.18) превращается в прямое, которое соответствует антиферромагнитному упорядочению (4.13), установленному нами выше для $SU(N)$ симметричной модели Хаббарда. Напомним, что схемы Юнга, характеризующие представления $SU(N)$, содержат не более N строк, поэтому пространственные схемы Юнга должны иметь не более N столбцов.

Отметим, что для тождественных бозонов имеет место обратное правило упорядочения (4.18). Общая волновая функция должна быть симметричной и составленной из эквивалентных представлений пространственных и спиновых симметрических групп [нужно использовать $\mathbb{Y}' = \mathbb{Y}$ в (4.19), заменить $\tilde{\mathbb{Y}} \rightarrow \mathbb{Y}$ и опустить

множитель четности (4.21)].

Наконец, отметим, что хотя упорядочение уровней энергии для решеточной (4.1) и квантово-механической (4.16) систем похоже, тем не менее, есть существенная разница между ними. Вторая система обладает симметрией относительно перестановки координат, что приводит к разделению спиновых и пространственных степеней свободы. Первая система не обладает пространственной симметрией вообще (если не учитывать возможную инвариантность при отражении или сдвиге при соответствующем выборе констант и граничных условий), и основное состояние (4.10) не представляется в факторизованной форме, как (4.21).

4.4 Обобщенная модель Хаббарда с квантово-групповой симметрией

Модель Хаббарда [102, 70] является простейшей системой сильно коррелированных электронов, которая точно решается лишь в одномерии с помощью анзаца Бете [130]. Она основана на приближении сильной связи для электронов, которые занимают стандартные орбитали в узлах кристаллической решётки. Исходный гамильтониан содержит кинетический член, соответствующий туннелированию, или перескоку электронов между соседними узлами решётки. Он объясняет проводимость соответствующего материала. Имеется также потенциал внутриузельного взаимодействия, который моделирует кулоновское отталкивание между электронами.

В результате конкуренции между кинетическим членом и потенциалом в модели Хаббарда происходит переход проводник-диэлектрик, что объясняет данное явление в оксидах некоторых переходных металлов. В то же время, в пределе сильного кулоновского взаимодействия, модель Хаббарда переходит в антиферромагнетик Гайзенберга с обменным взаимодействием между соседними $s = 1/2$ спинами. Благодаря этим двум свойствам, данная система стала популярным объектом исследования во многих работах.

После открытия высокотемпературной сверхпроводимости [12, 219] возрос интерес к сильно взаимодействующим электронным системам, в частности, к модели Хаббарда и к ее различным обобщениям. Впоследствии появились многочисленные публикации, посвященные исследованиям модели Хаббарда и ее многозонных обобщений для одномерных и двумерных систем. В основном используются различные методы приближения и численные методы, поскольку известно лишь весьма ограниченное число точных результатов. Один из таких точных результатов основан на механизме так называемого η -спаривания электронов, идея ко-

торого была предложена в работе [216, 218] для модели Хаббарда. Это свойство приводит к сверхпроводимости. Оказалось, что есть определенный тип квантовых состояний, которые обладают так называемым недиагональным дальним порядком (off-diagonal long-range order: ODLRO), концепция которого была детально разработана в работе [215]. В работах [215, 179, 158] было показано, что ODLRO предполагает эффект Мейснера и квантование магнитного потока. Таким образом, данное свойство можно рассматривать как определение сверхпроводимости. Вместе с тем, основное состояние обычной модели Хаббарда не является сверхпроводящим [215]. В отличие от него, суперсимметричная модель Хаббарда, которая была введена в работах [51, 52], обладает сверхпроводящим основным состоянием, где электроны объединяются в η -пары. Эта модель представляет собой некоторое расширение модели Хаббарда с дополнительным взаимодействием между ближайшими соседями и некоторым ограничением на кинетический член.

Оказалось, что механизм электронного η -спаривания не является экзотическим явлением: имеются некоторые расширенные модели Хаббарда со сверхпроводящими основными состояниями, которые могут быть найдены точно [188, 189, 190, 162, 20, 147, 174]. Эти расширенные модели Хаббарда, кроме обычных членов, отвечающих за перескоки электронов и взаимодействие Хаббарда, содержат также взаимодействия связанных зарядов, перескоки пар электронов, кулоновское и обменное спиновое взаимодействия соседей.

В данной главе мы разрабатываем новую технику для построения семейства иных расширений одномерной модели Хаббарда. Определяющим свойством этого семейства является то, что все ее члены обладают достаточно широкой симметрией, которую можно описать квантовой аффинной группой $U_q\widehat{sl}(2)$. Следует отметить, что квантово-групповые симметрии играют важную роль в интегрируемых системах статистической физики [107, 108, 47] и конформной теории поля [148, 163, 63]. Они являются q -деформациями генераторов обычных непрерывных групп

симметрий, при этом значение $q = 1$ соответствует генераторам обычной группы. Таким симметриям удовлетворяют S -матрицы интегрируемых двумерных теорий поля, а также статистические веса некоторых точно-решаемых моделей двумерной классической статистической механики и соответствующие им квантовые гамильтонианы спиновых цепочек. Более того, из квантово-групповой симметрии во многих случаях непосредственно вытекает уравнение Янга-Бакстера, которое является условием интегрируемости этих систем. Например, гамильтониан XXZ цепочки Гайзенберга с определенными граничными условиями является U_qsl_2 -инвариантной системой [163]. Бесконечная XXZ спиновая цепочка имеет более широкую симметрию, соответствующую аффинной квантовой группе $U_q\widehat{sl}_2$ [41]. Состояние отдельного спина рассматриваемых гамильтонианов образует мультиплет для алгебры Ли или его квантовой деформации.

В отличие от обычных квантовых цепочек, в моделях, рассматриваемых в данном разделе, состояния на каждом узле решетки образуют не один, а сразу несколько неприводимых мультиплетов первоначальной группы. Гамильтониан при этом строится из локальных сплетающих операторов между приводимыми представлениями, которые образованы тензорным произведением, причем ограничение гамильтониана на состояния с максимальными значениями спиновых проекций (т. е. старшие состояния, или состояния со старшим весом) соответствует более простому базовому гамильтониану, интегрируемость которого известна заранее. Следовательно, уровни энергии исходного гамильтониана совпадают с уровнями энергии базовой системы, но с дополнительным вырождением, которое соответствует степеням свободы, связанным с мультиплетами квантовой группы. В общем случае дополнительное вырождение зависит от уровня энергии, что приводит к нетривиальному интегрируемому обобщению базового гамильтониана. В рассматриваемых нами случаях, базовый гамильтониан соответствуют модели Гайзенберга, или цепочке Холдейна-Шастри [91, 180] с дальними взаимодействиями спинов.

Следует отметить, что указанная конструкция является обобщением метода, примененного в работе [7], которая соответствует некоторому расширению модели Хаббарда в пределе сильного отталкивания. Оказалось, что фермионизация простейших одномерных спиновых систем задает различные расширения модели Хаббарда. Мы приводим конкретные примеры фермионных моделей из общего семейства, один из которых обладает сверхпроводимостью, основанном на процессе η -спаривания электронов.

Энергетические уровни рассматриваемых квантовых цепочек формируются на состояниях, которые построены из векторов старшего веса различных представлений квантовых групп.

Сначала мы разрабатываем общую технику для построения гамильтонианов спиновых цепочек, симметрия которых задается аффинной квантовой группой $U_q\widehat{sl}_2$. Далее применяем данную конструкцию для различных конкретных систем. В дополнении даются определения квантовых групп U_qg и $U_q\widehat{g}$, а также описываются некоторые свойства R -матрицы.

Данная глава основана на работах [78, 14, 15, 9, 10, 71].

4.4.1 Инвариантные гамильтонианы на приводимых представлениях

Обозначим через $\mathbf{V}_\lambda$ конечномерное неприводимое представление квантовой группы U_qg , а через $\mathbf{V}_\lambda(x)$ – соответствующее параметризованное представление ее аффинного расширения $U_q\widehat{g}$. В приложении к данной главе дана необходимая информация о квантовой группе и ее представлениях. Пусть $\mathbf{V} = \oplus_{i=1}^N \mathbf{V}_{\lambda_i}$ – прямая сумма конечномерных неприводимых представлений U_qg . Обозначим через $\mathbf{V}(x_1, \dots, x_N)$ соответствующее аффинное представление со спектральными пара-

метрами x_i :

$$\mathbf{V}(x_1, \dots, x_N) = \bigoplus_{i=1}^N \mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i) \quad (4.23)$$

Рассмотрим сплетающий оператор

$$H(x_1, \dots, x_N) :$$

$$\mathbf{V}(x_1, \dots, x_N) \otimes \mathbf{V}(x_1, \dots, x_N) \rightarrow \mathbf{V}(x_1, \dots, x_N) \otimes \mathbf{V}(x_1, \dots, x_N),$$

$$[H(x_1, \dots, x_N), \Delta(a)] = 0, \quad \forall a \in U_q \hat{g}$$

Если $\mathbf{V} = \mathbf{V}_\lambda$ состоит из одной неприводимой компоненты, то H кратно единице, так как в этом случае тензорное произведение неприводимо. В общем случае сгруппируем вместе эквивалентные мультиплеты. Заметим, что эквивалентность двух $U_q \hat{g}$ -представлений $\mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i)$ означает, что их спектральные параметры x_i и старшие веса λ_i совпадают. Имеем:

$$\mathbf{V}(x_1, \dots, x_N) = \bigoplus_{i=1}^M \mathbf{N}_{\lambda_i} \hat{\otimes} \mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i), \quad (4.24)$$

где разные $\mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i)$ соответствуют неэквивалентным представлениям, а $\mathbf{N}_{\lambda_i} \simeq \mathbf{C}^{N_i}$ имеют размерность, равную кратности $\mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i)$ в $\mathbf{V}(x_1, \dots, x_N)$. Заметим, что $\sum_{i=1}^M N_i = N$, а шляпка над тензорным произведением означает, что $U_q \hat{g}$ действует на $\mathbf{N}_{\lambda_i} \hat{\otimes} \mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i)$ через $\mathbb{1} \otimes g$, а не посредством коумножения Δ квантовой группы [см. соотношения (4.75) в приложении].

Итак, имеем:

$$\begin{aligned} & \mathbf{V}(x_1, \dots, x_M) \otimes \mathbf{V}(x_1, \dots, x_M) \\ &= (\oplus_{i=1}^M \mathbf{N}_{\lambda_i} \hat{\otimes} \mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i)) \bigotimes (\oplus_{i=1}^M \mathbf{N}_{\lambda_i} \hat{\otimes} \mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i)) \\ &= \bigoplus_{i,j=1}^M \mathbf{N}_{\lambda_i} \hat{\otimes} \mathbf{N}_{\lambda_j} \hat{\otimes} (\mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i) \otimes \mathbf{V}_{\lambda_j}(x_j)). \end{aligned}$$

Далее, $\mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i) \otimes \mathbf{V}_{\lambda_j}(x_j)$ эквивалентно только самому себе, а также представлению $\mathbf{V}_{\lambda_j}(x_j) \otimes \mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i)$ (при $i \neq j$) посредством сплетающего оператора

$$\mathbb{R}(x_i/x_j) = PR(x_i/x_j),$$

где P является перестановкой в тензорном произведении:

$$P(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1.$$

Таким образом, наиболее общая форма оператора $H(x_1, \dots, x_M)$, коммутирующего с $U_q \hat{g}$ в пространстве

$$\mathbf{V}(x_1, \dots, x_M) \otimes \mathbf{V}(x_1, \dots, x_M)$$

имеет следующий вид:

$$H|_{\mathbf{N}_{\lambda_i} \hat{\otimes} \mathbf{N}_{\lambda_j} \hat{\otimes} \mathbf{V}_{\lambda_i} \otimes \mathbf{V}_{\lambda_j}} = A_{ij} \hat{\otimes} \mathbb{1}_{\mathbf{V}_{\lambda_i} \otimes \mathbf{V}_{\lambda_j}} + B_{ij} \hat{\otimes} \mathbb{R}_{\mathbf{V}_{\lambda_i} \otimes \mathbf{V}_{\lambda_j}}(x_i/x_j), \quad (4.25)$$

где A_{ij} и B_{ij} – произвольные операторы на $\mathbf{N}_{\lambda_i} \hat{\otimes} \mathbf{N}_{\lambda_j}$. Заметим, что при наличии только одного нетривиального представления $\mathbf{V}_\lambda$ в разложении (4.24) формула (4.25) упрощается. Поскольку

$$R_{\mathbf{V}_\lambda \otimes \mathbf{V}_0} = R_{\mathbf{V}_0 \otimes \mathbf{V}_\lambda} = \text{id},$$

то сплетающий оператор не содержит спектральных параметров x_i и деформационного параметра q . Таким образом, H остается инвариантным под действием квантовой группы для всех значений параметра деформации. Конечно, это достаточно широкая симметрия, и его можно записать в другой форме без использования параметра q .

Чтобы записать точный вид (4.25), введем проекционные операторы

$$X_b^a = |a\rangle\langle b|, \quad (4.26)$$

где векторы $|a\rangle$ образуют пространство $\mathbf{V}$. В соответствии с разложением (4.24) используем двойной индекс $a = (n_i, a_i)$, где первый индекс задает количество представлений $\mathbf{V}_{\lambda_i}$, а второй соответствует вектору в пространстве $\mathbf{V}_{\lambda_i}$. Тогда формула

(4.25) может быть представлена в виде

$$H(A, B) = \sum_{i,j=1}^M \left(\sum_{n_i, n_j, m_i, m_j} A_{ij n_i n_j}^{m_i m_j} \sum_{a_i, a_j} X_{(m_i, a_i)}^{(n_i, a_i)} \otimes X_{(m_j, a_j)}^{(n_j, a_j)} \right. \\ \left. + \sum_{n_i, n_j, m_i, m_j} B_{ij n_i n_j}^{m_i m_j} \sum_{a_i, a_j, a'_i, a'_j} R_{ij a'_i a'_j}^{a_i a_j}(x_i/x_j) X_{(m_i, a_i)}^{(n_j, a'_j)} \otimes X_{(m_j, a_j)}^{(n_i, a'_i)} \right), \quad (4.27)$$

где $B_{ii} = 0$, а R -оператор представляется в матричной форме:

$$R_{\mathbf{V}_{\lambda_i} \otimes \mathbf{V}_{\lambda_j}}(x_i/x_j) |a_i\rangle \otimes |a_j\rangle = \sum_{a'_i, a'_j} R_{ij a'_i a'_j}^{a_i a_j}(x_i/x_j) |a'_i\rangle \otimes |a'_j\rangle.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи этой общей конструкции.

(i) Пусть $\mathbf{V}(x) = \mathbf{V}(x, x) = \mathbf{V}_{\lambda}(x) \oplus \mathbf{V}_{\lambda}(x)$. Тогда второе слагаемое в (4.27) отсутствует, и H приобретает вид

$$H = A \hat{\otimes} \mathbb{1}_{\mathbf{V}_{\lambda} \otimes \mathbf{V}_{\lambda}}, \quad A = A_{n_1 n_2}^{m_1 m_2}, \quad (4.28)$$

где индексы $n_1, n_2, m_1, m_2 = 1, 2$ нумеруют эквивалентные $\mathbf{V}_{\lambda}$. В матричной форме (4.28) можно записать в виде

$$H = \sum_{n_i, n_j, m_i, m_j} A_{n_i n_j}^{m_i m_j} \sum_{a_i, a_j} X_{(m_i, a_i)}^{(n_i, a_i)} \otimes X_{(m_j, a_j)}^{(n_j, a_j)}. \quad (4.29)$$

(ii) Пусть теперь $\mathbf{V}(x_1, x_2) = \mathbf{V}_{\lambda_1}(x_1) \oplus \mathbf{V}_{\lambda_2}(x_2)$, где разные $\mathbf{V}_{\lambda_i}(x_i)$ неэквивалентны. Тогда H приобретает следующий блочно-диагональный вид:

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} a \cdot \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c \cdot \mathbb{1} & d \cdot R_{12}(x_1/x_2) & 0 \\ 0 & e \cdot R_{21}(x_2/x_1) & f \cdot \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g \cdot \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Здесь для краткости мы использовали обозначение

$$R_{12}(x_1/x_2) = R_{\mathbf{V}_{\lambda_1} \otimes \mathbf{V}_{\lambda_2}}(x_1/x_2), \quad R_{21}(x_2/x_1) = R_{\mathbf{V}_{\lambda_2} \otimes \mathbf{V}_{\lambda_1}}(x_2/x_1).$$

(iii) Выберем $g = sl(2)$ и $\mathbf{V} = \mathbf{V}_s \oplus \mathbf{V}_0$, где $\mathbf{V}_s$ соответствует $2s + 1$ -мерному спин- s представлению квантовой группы $U_q sl_2$, а $\mathbf{V}_0$ – тривиальному одномерному представлению. Этот случай был рассмотрен в [7].

Следуя [7], с помощью оператора H можно построить следующий гамильтониан, действующий на $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{\otimes L}$:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{L-1} H_{ii+1} \quad (4.31)$$

Здесь и в дальнейшем мы опускаем зависимость от x_i , а через X_{ij} обозначаем действие оператора $X = \sum_l x_l \otimes y_l$ на пространство $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$:

$$X_{ij} = \sum_l \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1} \otimes \underbrace{x_l}_i \otimes \mathbb{1} \dots \otimes \mathbb{1} \otimes \underbrace{y_l}_j \otimes \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}. \quad (4.32)$$

По построению $\mathcal{H}$ инвариантен относительно квантовой группы:

$$[\mathcal{H}, \Delta^{L-1}(g)] = 0, \quad \forall g \in U_q \hat{g}$$

Определим на $\mathbf{V}$ оператор проекции $\mathcal{Q}_i$ для каждого класса эквивалентных неприводимых представлений (λ_i, x_i) , $i = 1, \dots, M$:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_i v_j &= \delta_{ij} v_j, \quad \forall v_j \in \mathbf{V}_{\lambda_j}(x_j) \\ \sum_{i=1}^M \mathcal{Q}_i &= \mathbb{1}, \quad \mathcal{Q}_i^2 = \mathcal{Q}_i \end{aligned}$$

Их действие на $\mathbf{W}$ задается выражением

$$\bar{\mathcal{Q}}_i = \sum_{l=1}^L \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1} \otimes \underbrace{\mathcal{Q}_i}_l \otimes \mathbb{1} \dots \otimes \mathbb{1}$$

Легко видеть, что эти проекции коммутируют с гамильтонианом $\mathcal{H}$ и квантовой группой $\mathcal{H}$:

$$[\bar{\mathcal{Q}}_i, \mathcal{H}] = 0, \quad [\bar{\mathcal{Q}}_i, U_q \hat{g}] = 0 \quad (4.33)$$

Обозначим через $\mathbf{W}_{p_1 \dots p_M}$ подпространство $\mathbf{W}$ со значениями p_i равными $\bar{\mathcal{Q}}_i$. Тогда имеем разложение

$$\mathbf{W} = \bigoplus_{\substack{p_1, \dots, p_M \\ p_1 + \dots + p_M = L}} \mathbf{W}_{p_1 \dots p_M}. \quad (4.34)$$

Пусть $\mathbf{V}^0$ – линейное пространство, натянутое на старшие весовые векторы $U_q g$ -модуля $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{V}^0 := \bigoplus_{i=1}^N v_{\lambda_i}^0,$$

где $v_{\lambda_i}^0 \in \mathbf{V}_{\lambda_i}$ является старшим вектором (4.76). Определим также $\mathbf{W}^0 := \mathbf{V}^0 \otimes L$. Пространство $\mathbf{W}^0$ инвариантом относительно $\mathcal{H}$. Это вытекает из (4.25). Для общих значений q действие $U_q \hat{g}$ на $\mathbf{W}^0$ порождает все пространство $\mathbf{W}$. Действительно, действие $U_q \hat{g}$ на отдельное состояние вида $v_{\lambda_{i_1}}^0 \otimes \dots \otimes v_{\lambda_{i_L}}^0$ порождает все пространство $\mathbf{V}_{\lambda_{i_1}} \otimes \dots \otimes \mathbf{V}_{\lambda_{i_L}}$, потому что тензорное произведение конечномерных неприводимых представлений аффинной квантовой группы неприводимо [36].

Рассмотрим теперь подпространство $\mathbf{W}_{p_1 \dots p_M}^0 = \mathbf{W}^0 \cap \mathbf{W}_{p_1 \dots p_M}$. Имеем разложение, которое унаследовано от (4.34):

$$\mathbf{W}^0 = \bigoplus_{\substack{p_1, \dots, p_M \\ p_1 + \dots + p_M = L}} \mathbf{W}_{p_1 \dots p_M}^0. \quad (4.35)$$

Заметим, что

$$d_{p_1 \dots p_M} := \dim \mathbf{W}_{p_1 \dots p_M}^0 = \binom{L}{p_1 \dots p_M} N_1^{p_1} \dots N_M^{p_M}.$$

Определим через H_0 и $\mathcal{H}_0$ ограничение H и $\mathcal{H}$ на $\mathbf{V}^0 \otimes \mathbf{V}^0$ и $\mathbf{W}^0$ соответственно:

$$H_0 := H|_{\mathbf{V}^0 \otimes \mathbf{V}^0}, \quad \mathcal{H}_0 := \mathcal{H}|_{\mathbf{W}^0}.$$

Как следует из (4.33), гамильтонианы $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_0$ имеют блочно-диагональную форму относительно разложений (4.34) и (4.35) соответственно. Каждый собственный вектор гамильтониана

$$w_{\alpha_{p_1 \dots p_M}}^0 \in \mathbf{W}_{p_1 \dots p_M}^0$$

с энергией $E_{\alpha_{p_1 \dots p_M}}$ приводит к неприводимому $U_q \hat{g}$ -мультиплету $\mathbf{W}_{\alpha_{p_1 \dots p_M}}$ размерности

$$\dim \mathbf{W}_{\alpha_{p_1 \dots p_M}} = \prod_{k=1}^M (\dim \mathbf{V}_{\lambda_k})^{p_k}. \quad (4.36)$$

Гамильтониан $\mathcal{H}$ в пространстве $\mathbf{W}_{\alpha_{p_1 \dots p_M}}$ диагонален с собственным значением $E_{\alpha_{p_1 \dots p_M}}$. В частном случае, когда все $\mathbf{V}_{\lambda_i}$ эквивалентны, вырождения уровней одинаковы для всех $E_{\alpha_{p_1 \dots p_M}}$ и равны $(\dim \mathbf{V}_{\lambda})^L$.

Заметим, что

$$\begin{aligned} \dim \mathbf{W} &= \sum_{\substack{p_1 \dots p_M \\ p_1 + \dots + p_M = L}} \sum_{\alpha_{p_1 \dots p_M} = 1}^{d_{p_1 \dots p_M}} \dim \mathbf{W}_{\alpha_{p_1 \dots p_M}} \\ &= \sum_{\substack{p_1 \dots p_M \\ p_1 + \dots + p_M = L}} \binom{L}{p_1 \dots p_M} \prod_{k=1}^M N_k^{p_k} \prod_{k=1}^M (\dim \mathbf{V}_{\lambda_k})^{p_k} \\ &= \left(\sum_{k=1}^M N_k \dim \mathbf{V}_{\lambda_k} \right)^L \end{aligned}$$

в соответствии с разложением

$$\mathbf{W} = \bigoplus_{\substack{p_1, \dots, p_M \\ p_1 + \dots + p_M = L}} \bigoplus_{\alpha_{p_1 \dots p_M} = 1}^{d_{p_1 \dots p_M}} \mathbf{W}_{\alpha_{p_1 \dots p_M}}.$$

Предположим теперь, что у нас есть энергетический спектр $E_{\alpha_{p_1 \dots p_M}}$ для системы $\mathcal{H}_0$. Тогда для статистической суммы имеем выражение:

$$Z_{\mathcal{H}_0}(\beta) = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_M \\ p_1 + \dots + p_M = L}} \sum_{\alpha_{p_1 \dots p_M} = 1}^{d_{p_1 \dots p_M}} \exp(\beta E_{\alpha_{p_1 \dots p_M}}), \quad (4.37)$$

а статистическая сумма гамильтониана $\mathcal{H}$ имеет следующий вид:

$$Z_{\mathcal{H}}(\beta) = \sum_{\substack{p_1, \dots, p_M \\ p_1 + \dots + p_M = L}} \prod_{k=1}^M (\dim \mathbf{V}_{\lambda_k})^{p_k} \sum_{\alpha_{p_1 \dots p_M} = 1}^{d_{p_1 \dots p_M}} \exp(\beta E_{\alpha_{p_1 \dots p_M}}). \quad (4.38)$$

Итак, если базовый гамильтониан $\mathcal{H}_0$ интегрируем и его собственные векторы и собственные значения известны, то их можно найти также и для гамильтониана $\mathcal{H}$. Действием же генераторов квантовой группы на произвольное собственное состояние $\mathcal{H}_0$ можно получить все состояния $\mathcal{H}$ данного энергетического уровня.

Рассмотрим теперь некоторые частные случаи нашей общей конструкции.

Если мы выберем два эквивалентных представления (см. первый пример), то $\dim \mathbf{V}^0 = 2$, а в разложении (4.35) присутствует только одно слагаемое. H_0 является

наиболее общим действием на $\mathbf{V}^0 \otimes \mathbf{V}^0$, частный случай которого соответствует модели XYZ магнетика в магнитном поле. Соответствие между спектрами $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_0$ является в данном случае тривиальным, потому что степени дополнительных вырождений всех уровней энергии совпадают, и для статистических сумм (4.37), (4.38) имеем

$$Z_{\mathcal{H}}(\beta) = (\dim \mathbf{V}_{\lambda})^L Z_{\mathcal{H}_0}(\beta) = (\dim \mathbf{V}_{\lambda})^L Z_{XXZ}(\beta).$$

Рассмотрим теперь второй пример H -оператора. Выберем в качестве параметров в (4.30)

$$a = g = e = d = 1 \quad c = f = 0. \quad (4.39)$$

R -матрицы (4.30) можно перенормировать так, чтобы они удовлетворяли бы условию унитарности

$$R_{12}(z)R_{21}(z^{-1}) = \mathbb{1}.$$

Вместе с соотношением (4.39) это приводит к условию

$$H(x_1, x_2)^2 = \mathbb{1}. \quad (4.40)$$

Ограничение $\mathcal{H}$ на $\mathbf{W}^0$ совпадает с XXX спиновой цепочкой Гайзенберга

$$\mathcal{H}_0 = H_{XXX} = \sum_i P_{ii+1} = \frac{1}{2} \sum_i (1 + \vec{\sigma}_i \vec{\sigma}_{i+1})$$

Пространство $\mathbf{W}_{p_1 p_2}^0$ образовано всеми состояниями со значением $s_z = p_1/2$ для проекции спина $S^z = 1/2 \sum_i \sigma_i^z$. Возвращаясь к $\mathcal{H}$, вырождение уровней энергии для каждого собственного состояния с проекцией спина s_z умножается на число $(\dim \mathbf{V}_{\lambda_1})^{2s_z} (\dim \mathbf{V}_{\lambda_2})^{L-2s_z}$.

4.4.2 Спиновые цепочки с дальними взаимодействиями

Рассмотрим теперь обобщение вышеописанной конструкции для случая гамильтонианов с дальними взаимодействиями.

Примером интегрируемой модели с таким свойством является спиновая цепочка Холдейна-Шастри, которая задается гамильтонианом [91, 180, 103]

$$\mathcal{H}_0^{HS} = \sum_{i < j} \frac{1}{d_{i-j}^2} P_{ij}, \quad (4.41)$$

Здесь спины принимают значения в фундаментальном представлении sl_n , а P_{ij} переставляет спины i -й и j -й позиции. Известно, что гамильтониан (4.41) интегрируем, если d_i имеет одно из следующих значений

$$d_j = \begin{cases} j & \text{рациональная модель} \\ (1/\alpha) \sinh(\alpha j) & \text{гиперболическая модель} \\ (L/\pi) \sin(\pi j/L) & \text{тригонометрическая модель} . \end{cases}$$

Тригонометрическая модель задается на периодической цепочке, а сумма в (4.41) берется по конечному набору индексов от одного до L . Рациональная и гиперболическая модели определяются для бесконечной системы.

Рассмотрим для простоты только sl_2 -симметричные модели типа Холдейна-Шастри. В этом случае пространство $\mathbf{V}^0$ двумерное, так что имеется два члена в разложении (4.23).

Теперь наша цель состоит в построении дальнедействующей модели, которая на старшем весовом пространстве $\mathbf{W}^0$ совпадает с (4.41). Таким образом, мы берем $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\lambda_1} \oplus \mathbf{V}_{\lambda_2}$, что соответствует второму примеру, рассмотренному в предыдущем параграфе. Для получения перестановки на подпространстве $\mathbf{V}^0 \otimes \mathbf{V}^0$, наложим условия (4.39) на параметры оператора H (4.30). Попытаемся обобщить гамильтониан (4.41) следующим образом:

$$\mathcal{H}^{HS} = \sum_{i < j} \frac{1}{d_{i-j}^2} H_{ij}.$$

Но тогда $\mathcal{H}^{HS}$ не инвариантен по отношению к квантовой группе $U_q \hat{g}$, потому что уравнение

$$\mathbb{R}_{ij}(x_1, x_2) \Delta^{L-1}(g) = \Delta^{L-1}(g) \mathbb{R}_{ij}(x_1, x_2), \quad g \in U_q \hat{g}$$

верно только при $i = j \pm 1$.

Для преодоления этой трудности используем вместо H_{ij} оператор

$$F_{[ij]} = G_{[ij]} H_{j-1j} G_{[ij]}^{-1}, \quad \text{где} \quad G_{[ij]} = H_{ii+1} H_{i+1i+2} \dots H_{j-2j-1} \quad (4.42)$$

Заметим, что $F_{[ij]}$ и $G_{[ij]}$ нетривиально действуют только на промежуточные индексы $i, i+1, \dots, j$. Поэтому мы включаем их в скобки, чтобы не путать с определением (4.32). Нелокальные члены, подобные $F_{[ij]}$, рассматривались ранее при построении периодических спиновых цепочек, обладающих квантово-групповой симметрией, где они соответствовали граничному члену [139, 69, 111].

Операторы H_{ii+1} удовлетворяют стандартным соотношениям симметрической группы перестановок (4.40), а также

$$H_{i-1i} H_{ii+1} H_{i-1i} = H_{ii+1} H_{i-1i} H_{ii+1}. \quad (4.43)$$

Эти соотношения выполняются на $\mathbf{W}^0$, так как ограничение H_{ij} на это подпространство задает перестановки P_{ij}

$$H_{ij}|_{\mathbf{W}^0} = P_{ij}.$$

Уравнения (4.43) распространяются на все пространство $\mathbf{W}$ действием аффинной квантовой группы $H_{i,i+1}$. В отличие от стандартной реализации через P_{ij} соотношения

$$P_{i-1i} P_{ii+1} P_{i-1i} = P_{i-1i+1} \quad (4.44)$$

не выполняются. Из (4.42) и (4.44) легко видеть, что

$$F_{[ij]}|_{\mathbf{W}^0} = P_{ij}.$$

Таким образом, спиновая цепочка

$$\mathcal{H}^{HS} = \sum_{i < j} \frac{1}{d_{i-j}^2} F_{[ij]}, \quad (4.45)$$

является инвариантной относительно квантовой группы и разложения $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_\lambda$, а ее ограничение на пространство $\mathbf{W}^0$ совпадает со спиновой цепочкой Холдейна-Шастри (4.41).

В некоторых случаях нелокальные выражения для $F_{[ij]}$ (4.42) зависят только от узлов i и j . Например, если $\mathbf{V}_{\lambda_1}$ тривиально ($\mathbf{V}_{\lambda_1} = \mathbf{V}_0$, $\mathbf{V}_{\lambda_2} = \mathbf{V}_\lambda$), то

$$R_{12}(x_1/x_2) = R_{21}(x_2/x_1) = \mathbb{1},$$

и матрицы H (4.30) относительно разложения $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_\lambda$ имеют на $\mathbf{V} \otimes \mathbf{V}$ блочно-диагональный вид:

$$H = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Таким образом, блочно-диагональная форма H является перестановкой и, следовательно, удовлетворяет соотношению (4.44). Тогда блоки $F_{[ij]}$ нетривиально действуют только на двух узлах i, j , где они задают перестановку (4.46). Теперь все члены выражения (4.45) соответствуют взаимодействиям между двумя различными узлами, и оно может быть записано в явном виде:

$$\mathcal{H}^{HS} = \sum_{i < j} \frac{1}{d_{i-j}^2} \left[\sum_{a=1}^{\dim \mathbf{V}_\lambda} (X_{i0}^a X_{ja}^0 + X_{ja}^0 X_{i0}^a) + X_{i0}^0 X_{j0}^0 + \sum_{a,a'=1}^{\dim \mathbf{V}_\lambda} X_{ia}^a X_{ja'}^{a'} \right].$$

Энергетические уровни $\mathcal{H}^{HS}$ совпадают с уровнями (4.41). Степени вырождения уровней $\mathcal{H}^{HS}$ относительно соответствующих степеней вырождения в (4.41) определяется формулой (4.36). Соотношения (4.37), (4.38) между статистическими суммами гамильтонианов H_0^{HS} и H^{HS} остаются неизменными.

4.5 Фермионные представления

В данном разделе рассматриваются представления некоторых гамильтонианов полученных в предыдущих разделах, через фермионные операторы рождения-уничтожения $c_{i,\sigma}^\pm$ спина $\sigma = \uparrow, \downarrow$.

Ниже мы будем иметь дело только с квантовой группой $U_q \widehat{sl}_2$. Рассмотрим простейший случай, когда в разложении V есть только одно представление. Тогда R -матрицы, входящие в гамильтониан, соответствуют перестановкам, поэтому сам гамильтониан будет $U_q \widehat{sl}_2$ -инвариантным при всех значениях параметра деформации q .

Отождествим пространство $\mathbf{V}$ с пространством фермионных волновых функций спина σ ($\sigma = \uparrow, \downarrow$). Обозначим через $|0\rangle$ фермионный вакуум: $c_\sigma|0\rangle = 0$. Также используем стандартные обозначения для фермионных состояний на данном узле:

$$|\sigma\rangle = c_\sigma^+|0\rangle, \quad |\downarrow\uparrow\rangle = -|\uparrow\downarrow\rangle = c_\downarrow^+ c_\uparrow^+|0\rangle.$$

Для построения фермионных представлений гамильтонианов, рассмотренных в предыдущем разделе, удобно использовать фермионное представление для проекционных операторов (4.26). В этом случае $a, b = 0, \pm 1, 2$, где 0 обозначает пустой узел, ± 1 обозначает соответственно состояния $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$, а 2 – узел $|\downarrow\uparrow\rangle$ с двумя фермионами. Операторы рождения и уничтожения выражаются через проекционные операторы:

$$c_\sigma^+ = X_\sigma^\sigma - \sigma X_{-\sigma}^2, \quad c_\sigma = X_\sigma^0 - \sigma X_2^{-\sigma}, \quad n_\sigma = X_\sigma^\sigma + X_2^2, \quad \sigma = \pm 1. \quad (4.47)$$

Обратные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} X_0^\sigma &= (1 - n_{-\sigma})c_\sigma^+, & X_\sigma^2 &= n_\sigma c_{-\sigma}^+, & X_2^0 &= c_\uparrow c_\downarrow, \\ X_\sigma^\sigma &= (1 - n_{-\sigma})n_\sigma, & X_0^0 &= (1 - n_\downarrow)(1 - n_\uparrow) = n^h, & X_2^2 &= n_\uparrow n_\downarrow = d. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Аналогичные формулы получаются с учетом $(X_b^a)^+ = X_a^b$. Здесь мы ввели оператор локального взаимодействия Хаббарда d , который учитывает только полностью

заполненные узлы и оператор n^h , учитывающий дырки.

4.5.1 $t - J$ -модель при нулевом спин-спиновом взаимодействии и модель Хаббарда в пределе бесконечного отталкивания

Рассмотрим простейший случай, когда пространство состояний распадается в прямую сумму фундаментального мультиплета спина $1/2$ и тривиального спина 0 : $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_{1/2}$ [7]. Отождествим $\mathbf{V}_0$ с пустым узлом $|0\rangle$, а $\mathbf{V}_{1/2}$ с одноэлектронными состояниями $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$. Используя (4.30), получим

$$\mathcal{H}(t, W_1, W_2) = \sum_{i=1}^{L-1} \left[-t \sum_{\sigma, \sigma'=\pm 1} (X_{i0}^\sigma X_{i+1\sigma}^0 + X_{i+10}^\sigma X_{i\sigma}^0) + W_1 X_{i0}^0 X_{i+10}^0 + W_2 \sum_{\sigma, \sigma'=\pm 1} X_{i\sigma}^\sigma X_{i+1\sigma'}^{\sigma'} \right]$$

После подстановки фермионного представления (4.48) для проекционных операторов, опуская несущественные в термодинамическом пределе граничные члены, вышеуказанный гамильтониан переходит в

$$\mathcal{H}_{t-J}(t, W, \mu) = \sum_{i=1}^{L-1} \left[-t \sum_{\sigma=\pm 1} (1 - n_{i,-\sigma})(c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma} + c_{i+1,\sigma}^+ c_{i,\sigma})(1 - n_{i+1,-\sigma}) + W n_i n_{i+1} \right] + \mu \sum_{i=1}^L n_i, \quad (4.49)$$

где $W = W_1 + W_2$ и $\mu = -2W_1$. Поскольку $\mathcal{H}(t, W, \mu)$ сохраняет число частиц, он остается интегрируемым и при снятии ограничения на μ . Этот гамильтониан запрещает узлы с двумя фермионами и совпадает с $t - J$ моделью при нулевом спин-спиновом взаимодействии $J = 0$. Интегрируемость этой модели и ее соответствие XXZ спиновой цепочке хорошо известна [175]. При отсутствии взаимодействия плотность-плотность, т. е. при $V = 0$ система (4.49) сводится к модели Хаббарда в пределе бесконечного отталкивания.

4.5.2 Расширенная модель Хаббарда с допингом, перескоком фермионных пар и взаимодействием дырок

Рассмотрим теперь случай, когда $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_1$. Это соответствует подстановке $R_{12}(x) = R_{21}(x) = \mathbb{1}$ в (4.30). Заметим, что в этом случае H не зависит от x_i и q . Выберем коэффициенты следующим образом:

$$H = \begin{pmatrix} W_1 \cdot \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t \cdot \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -t \cdot \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_2 \cdot \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Мы отождествляем вакуумное состояние $|0\rangle$ с $|\uparrow\rangle$, а пространство, натянутое на $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle, |\downarrow\rangle$ — с $\mathbf{V}_1$. Общий гамильтониан (4.31) в нашем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, W_1, W_2) = \sum_{i=1}^{L-1} \left[-t \sum_{\sigma=\pm 1} (X_{i0}^\sigma X_{i+1\sigma}^0 + X_{i+10}^\sigma X_{i\sigma}^0) - t(X_{i0}^2 X_{i+12}^0 \right. \\ \left. + X_{i+10}^2 X_{i2}^0) + W_1 X_{i0}^0 X_{i+10}^0 + W_2 \sum_{\sigma, \sigma'=\pm 1} (X_{i\sigma}^\sigma + X_{i2}^2)(X_{i+1\sigma'}^{\sigma'} + X_{i+12}^2) \right]. \end{aligned} \quad (4.51)$$

После подстановки (4.48) в (4.51) получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, W_1, W_2) = \sum_{i=1}^{L-1} \left[-t \cdot \sum_{\sigma} (1 - n_{i,-\sigma})(c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma} + c_{i+1,\sigma}^+ c_{i,\sigma})(1 - n_{i+1,\sigma}) \right. \\ \left. - t(c_{i,\uparrow}^+ c_{i,\downarrow}^+ c_{i+1,\downarrow} c_{i+1,\uparrow} + c_{i+1,\uparrow}^+ c_{i+1,\downarrow}^+ c_{i,\downarrow} c_{i,\uparrow}) + W_1 n_i^h n_{i+1}^h \right. \\ \left. + W_2(n_i - d_i)(n_{i+1} - d_{i+1}) \right] - 2W_2 \sum_{i=1}^L n_i + W_2(n_1^h + n_L^h) + W_2 L. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Генераторы квантовой группы (4.74) после перенормировки также выражаются через фермионы:

$$\begin{aligned} e_1 &= [2]_q^{-1/2} (n_\uparrow c_\downarrow^+ + n_\downarrow c_\uparrow) & e_0 &= f_1 \\ f_1 &= [2]_q^{-1/2} (n_\uparrow c_\downarrow + n_\downarrow c_\uparrow^+) & f_0 &= e_1 \\ h_1 &= 2(n_\uparrow - n_\downarrow) & h_0 &= -h_1. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Первое слагаемое в (4.52) известно как "допинг" член, а второе соответствует перескоку фермионной пары. Используя $n^h = 1 - n + d$ и опуская несущественные

граничные члены и постоянные в (4.52), получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, W, U, \mu) = \sum_{i=1}^{L-1} \left[-t \sum_{\sigma} (1 - n_{i,-\sigma}) (c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma} + c_{i+1,\sigma}^+ c_{i,\sigma}) (1 - n_{i+1,\sigma}) \right. \\ \left. - t (c_{i,\uparrow}^+ c_{i,\downarrow}^+ c_{i+1,\downarrow} c_{i+1,\uparrow} + c_{i+1,\uparrow}^+ c_{i+1,\downarrow}^+ c_{i,\downarrow} c_{i,\uparrow}) + W n_i^h n_{i+1}^h \right] \\ + U \sum_{i=1}^L n_{i,\uparrow} n_{i,\downarrow} + \mu \sum_{i=1}^L n_i, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где $W = W_1 + W_2$, $\mu = 2W_2$, $U = -2W_2$. Энергетические уровни полученной фермионной модели совпадают с уровнями спиновой цепочки $\mathcal{H}_0(t, W_1, W_2)$ на $\mathbf{W}^0$.

Легко видеть, что член, отвечающий за взаимодействие между двумя узлами

$$H_0 = \begin{pmatrix} W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 \\ 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_2 \end{pmatrix} \quad (4.55)$$

приводит к XXZ модели во внешнем магнитном поле (see (4.61), (4.62) below).

Отметим, что гамильтониан (4.52) сохраняет количество дырок $\mathcal{N}^h = \sum_{i=1}^L n_i^h$ и число полностью занятых узлов: $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^L d_i$. Таким образом, без нарушения интегрируемости мы можем выбрать коэффициенты соответствующих членов в (4.54) произвольными. Конечно, в этом случае нарушается инвариантность гамильтониана (4.54) по отношению к квантовой группе (4.53).

4.5.3 Расширенная модель Хаббарда с взаимодействиями типа плотность-плотность и “бозон-бозон”

Рассмотрим разложение $\mathbf{V}(x_a, x_b) = \mathbf{V}_a(x_a) \oplus \mathbf{V}_b(x_b)$ и отождествим первый мультиплет с пространством, порожденным $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$, а второй – с пространством, порожденным $|0\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle$. Здесь мы рассматриваем две различные коммутирующие квантовые группы, действующие на $\mathbf{V}$. Первая из них $(U_q \widehat{sl}_2^{(1)})$ действует на $\mathbf{V}_a$ как на мультиплет со спином $1/2$, т. е. $\mathbf{V}_a \sim \mathbf{V}_{1/2}$, а на $\mathbf{V}_b$ как на два отдельных

спиновых синглета ($\mathbf{V}_b \sim \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_0$). Вторая группа ($U_q \widehat{sl}_2^{(2)}$) действует наоборот:

$$\mathbf{V}_a \sim \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_0, \text{ и } \mathbf{V}_b \sim \mathbf{V}_{1/2}.$$

Теперь, используя вид сплетающих операторов H (4.27) для разложения

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{1/2} \oplus \mathbf{V}_0 \oplus \mathbf{V}_0$$

и подставив нули вместо матриц $A_{0\frac{1}{2}}$ и $A_{\frac{1}{2}0}$, получим:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(A, B) = \sum_{\langle i, j \rangle} \left[\sum_{\delta^i, \delta^{i'}, \delta^j, \delta^{j'}} A_{00\delta^i\delta^j}^{\delta^{i'}\delta^{j'}} X_{i\delta^{i'}}^{\delta^i} X_{j\delta^{j'}}^{\delta^j} + \sum_{\sigma^i, \sigma^j} A_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} X_{i\sigma^i}^{\sigma^i} X_{j\sigma^j}^{\sigma^j} \right. \\ \left. + \sum_{\sigma, \delta^i, \delta^j} \left(B_{0\frac{1}{2}\delta^j}^{\delta^i} X_{i\delta^i}^{\sigma} X_{j\sigma}^{\delta^j} + B_{\frac{1}{2}0\delta^i}^{\delta^j} X_{i\sigma}^{\delta^i} X_{j\delta^j}^{\sigma} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Заметим, что индексы i, j здесь обозначают ближайших соседей, а не неэквивалентные представления λ_i как в (4.27). Использован верхний индекс во избежание путаницы с (4.27). Кроме того, двойной индекс в (4.27) заменен на простые индексы $\sigma = \pm 1$, $\delta = 0, 2$ согласно правилу: $(1, a_{\frac{1}{2}}) \sim \sigma$, $(n_0, 1) \sim \delta$. Выберем параметры в (4.56) следующим образом:

$$A_{00\delta^i\delta^j}^{\delta^{i'}\delta^{j'}} = \delta_{\delta^i}^{\delta^{i'}} \delta_{\delta^j}^{\delta^{j'}} W_2, \quad A_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = W_1, \quad B_{0\frac{1}{2}\delta^j}^{\delta^i} = B_{\frac{1}{2}0\delta^i}^{\delta^j} = -t\delta_{\delta^j}^{\delta^i}.$$

После упрощений получаем:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, W_1, W_2) = \sum_{i=1}^{L-1} \left[-t \sum_{\substack{\sigma, \sigma' = \pm 1 \\ \delta, \delta' = 0, 2}} (X_{i\delta}^{\sigma} X_{i+1\sigma'}^{\delta} + X_{i+1\delta}^{\sigma} X_{i\sigma'}^{\delta}) \right. \\ \left. + W_1 \sum_{\sigma, \sigma' = \pm 1} X_{i\sigma}^{\sigma} X_{i+1\sigma'}^{\sigma'} + W_2 \sum_{\delta, \delta' = 0, 2} X_{i\delta}^{\delta} X_{i+1\delta'}^{\delta'} \right] \end{aligned} \quad (4.57)$$

Взаимодействие между ближайшими соседями данного гамильтониана сохраняет свою форму по отношению к перестановке индекса $\delta \leftrightarrow \sigma$. Это означает, что $\mathcal{H}(t, W_1, W_2)$ инвариантен по отношению к обеим квантовым группам: $U_q \widehat{sl}_2^{(1)}$ и $U_q \widehat{sl}_2^{(2)}$. Таким образом, (4.57) обладает $U_q \widehat{sl}_2 \otimes U_q \widehat{sl}_2$ симметрией. Подпространство старшего веса на каждом узле образуется состояниями $|\uparrow\rangle, |0\rangle$, взятых соответственно из подпространств $\mathbf{V}_a, \mathbf{V}_b$.

Используя фермионное представление X -операторов (4.48), получаем:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t, W_1, W_2) = & \sum_{i=1}^{L-1} \left[\sum_{\sigma=\uparrow, \downarrow} \{ -t(c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma} + c_{i+1,\sigma}^+ c_{i,\sigma}) \right. \\
& \left. + t(c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma} + c_{i+1,\sigma}^+ c_{i,\sigma})(n_{i,-\sigma} + n_{i+1,-\sigma}) \right] \\
& + (W_1 + W_2)(n_i n_{i+1} - 2n_i d_{i+1} - 2n_{i+1} d_i + 4d_i d_{i+1}) \\
& + 2W_1(d_i + d_{i+1}) - W_1(n_i + n_{i+1}) + W_1]
\end{aligned} \tag{4.58}$$

Здесь разрешены фермионные перескоки двух типов. Во-первых, фермион из узла, занятого только им самим, может перескочить на соседний пустой узел:

$$|\dots \sigma, 0 \dots\rangle \longleftrightarrow |\dots 0, \sigma \dots\rangle, \quad \sigma = \uparrow, \downarrow$$

Такой переход характерен для $t - J$ модели.

Во-вторых, фермион из узла, занятого двумя частицами с противоположными спинами, может перескочить на узел, занятый только одним фермионом, например:

$$|\dots \uparrow\downarrow, \uparrow \dots\rangle \longleftrightarrow |\dots \uparrow, \downarrow\uparrow \dots\rangle.$$

Такой член возникал в работе [113] после проекции модели Хаббарда на подпространство состояний с фиксированным числом заполнений для всех узлов. Таким образом, гамильтониан (4.58) сохраняет число заполнений фермионов: количество дырок $\mathcal{N}^h$ и количество полностью занятых узлов $\mathcal{D}$. Таким образом, соответствующие члены могут быть взяты с произвольными коэффициентами, что не влияет на интегрируемость. Кроме того, отметим, что член

$$2(W_1 + W_2) \sum_{i=1}^{L-1} 2d_i d_{i+1} - n_i d_{i+1} - n_{i+1} d_i$$

можно интерпретировать как взаимодействие между дыркой, или полностью занятым узлом с потенциалом Хаббарда следующего вида:

$$2(W_1 + W_2) \sum_{i=1}^{L-1} n_i^h d_{i+1} + n_{i+1}^h d_i - d_i - d_{i+1}$$

Итак, (4.58) можно обобщить как

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t, W_1, W_2, U, \mu) = & \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{\sigma=\uparrow, \downarrow} \left[-t(c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma} + c_{i+1,\sigma}^+ c_{i,\sigma}) \right. \\
& \left. + t(c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma} + c_{i+1,\sigma}^+ c_{i,\sigma})(n_{i,-\sigma} + n_{i+1,-\sigma}) \right] \\
& + W \sum_{i=1}^{L-1} (n_i n_{i+1} + 2n_i^h d_{i+1} + 2n_{i+1}^h d_i) + U \sum_{i=1}^L d_i + \mu \sum_{i=1}^L n_i \\
& + W_1(n_1 + n_L) + 2W_2(d_1 + d_L)
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Член с коэффициентом $W = W_1 + W_2$ состоит из стандартного взаимодействия плотность-плотность между ближайшими соседями и взаимодействия между дыркой с узлом, занятым двумя фермионами с противоположными спинами. Последнее взаимодействие можно рассматривать как взаимодействие между двумя различными бозонными узлами $|0\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle$. Граничные члены в (4.59) не влияют на спектр в термодинамическом пределе и могут быть опущены. Таким образом, в этом пределе гамильтониан зависит только от $W = W_1 + W_2$.

Связь между гамильтонианами (4.58) и (4.59) задается выражением

$$\mathcal{H}(t, W_1, W_2, U, \mu) = \mathcal{H}(t, W_1, W_2) + (U + 4W_2)\mathcal{D} + (\mu + 2W_1)\mathcal{N} - W_1(L - 1). \tag{4.60}$$

Теперь рассмотрим ограничение (4.58) на старшее весовое пространство, которое порождается пустыми узлами и узлами, занятыми $\sigma = \uparrow$ спином. Матричный вид $H_0(t, W_1, W_2) = A$ полностью соответствует XXZ спиновой цепочке. Как следует из нашего предыдущего исследования, рассматриваемая модель точно-решаемая и имеет те же энергетические уровни, что и XXZ модель Гайзенберга в однородном магнитном поле $\vec{B} = B\vec{z}$, направленном вдоль оси z :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0(t, W_1, W_2) &= \mathcal{H}_{XXZ}(t, \Delta, B) \\
&= -\frac{t}{2} \sum_{i=1}^{L-1} \left(\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \Delta \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + \frac{B}{2} \sigma_i^z \right),
\end{aligned} \tag{4.61}$$

где

$$\Delta = -\frac{W}{2t}, \quad B = \frac{2}{t}(W_1 - W_2). \tag{4.62}$$

Все уровни энергии имеют одинаковые степени вырождения. Напомним, что мы отождествили спиновые состояния $|+\rangle, |-\rangle$ (4.61), соответственно, с состояниями старшего веса $|\uparrow\rangle, |0\rangle$ пространства V .

4.5.4 Сверхпроводящее основное состояние

Легко проверить, что гамильтониан (4.57), (4.58) коммутирует с операторами η -пар [216, 218, 51, 52]:

$$\begin{aligned}\eta &= \sum_{i=1}^L c_{i,\uparrow} c_{i,\downarrow} = \sum_{i=1}^L X_{i2}^0, & \eta^+ &= \sum_{i=1}^L c_{i,\downarrow}^+ c_{i,\uparrow}^+ = \sum_{i=1}^L X_{i0}^2, \\ \eta^z &= \mathcal{N} - L = \sum_{i=1}^L (X_{i2}^2 - X_{i0}^0),\end{aligned}\tag{4.63}$$

которые образуют алгебру $su(2)$. Используя это вместе с (4.60) можно вычислить коммутаторы (4.63) с обобщенным гамильтонианом (4.59)

$$[\mathcal{H}(t, W_1, W_2, U, \mu), \eta^\pm] = \pm(U + 2\mu + 4W)\eta^\pm.\tag{4.64}$$

Итак, имеем:

$$[\mathcal{H}(t, W_1, W_2, U, \mu), \eta^\pm] = 0,$$

если параметры удовлетворяют условию $\mu = -U/2 - 2W$.

Нас интересует термодинамическое поведение системы при нулевой температуре. Обозначим через $E_N = E_N(t, W_1, W_2, U, \mu)$ энергию основного состояния для $\mathcal{H}(t, W_1, W_2, U, \mu)$ в N -частичном секторе. Кроме того, пусть $\mathcal{E}_{N_1} = \mathcal{E}_{N_1}(\Delta)$ является основным состоянием XXZ спиновой цепочки в отсутствии внешнего магнитного поля ($B = 0$) в секторе с N_1 спинами, направленными вверх. Напомним, что узлы, занятые одним фермионом, соответствуют направленным вверх спинам в XXZ модели, в то время как полностью заполненные и пустые узлы соответствуют направленным вниз спинам. Таким образом, в секторе, который состоит из состояний с фиксированным числом заполнения $\mathcal{N}_1 = N_1$, $\mathcal{D} = (N - N_1)/2$,

минимальная энергия $E_N^{N_1}$ системы $\mathcal{H}(t, W_1, W_2, U, \mu)$ задается выражением (см. (4.60)):

$$E_N^{N_1} = \mathcal{E}_{N_1} - \left(\frac{U}{2} + W\right) N_1 + \left(\frac{U}{2} + \mu + 2W\right) N + \frac{L}{2}(W_1 - W_2). \quad (4.65)$$

Для получения энергии основного состояния E_N следует минимизировать выражение (4.65) по всем возможным значениям параметра N_1

$$E_N = \min_{0 \leq N_1 \leq N} E_N^{N_1} = \min_{0 \leq N_1 \leq N} \left[\mathcal{E}_{N_1} - \left(\frac{U}{2} + W\right) N_1 \right] + \left(\frac{U}{2} + \mu + 2W\right) N + \frac{L}{2}(W_1 - W_2). \quad (4.66)$$

Отметим, что гамильтонианы $\mathcal{H}_{XXZ}(t, \Delta, 0)$ и $\mathcal{H}_{XXZ}(-t, -\Delta, 0)$ связаны преобразованием подобия [59]. Таким образом, спектр $\mathcal{H}_{XXZ}(t, \Delta, 0)$ в двух ферромагнитных областях $(-t > 0, \Delta \leq -1)$ и $(-t < 0, \Delta \geq 1)$ совпадает. Поэтому в дальнейшем мы исследуем только первую область, выбрать параметризацию

$$\Delta = -\cosh \gamma, \quad \gamma > 0.$$

Заметим, что благодаря инвариантности при отражении всех спинов система (4.61) при отсутствии магнитного поля имеет две ферромагнитные основные состояния

$$|\pm, vac\rangle_{XXZ} = |\pm, \pm, \dots, \pm\rangle$$

с энергией $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_L = -t/2(L-1)\Delta$.

Энергетические уровни спиновой цепочки XXZ определяются с помощью анзаца Бете [23, 217]. В термодинамическом пределе $L \rightarrow \infty$ он имеет так называемые струнные решения. Как было показано в работе [6], минимальная энергия в секторе с N_1 спинами вверх равна

$$\mathcal{E}_{N_1} = -2t \sinh \gamma \frac{\sinh N_1 \gamma}{\cosh N_1 \gamma + 1} + \mathcal{E}_0 = -2t \sinh \gamma \tanh \frac{N_1}{2} \gamma + \mathcal{E}_0 \quad (4.67)$$

и соответствует одной струне длины N_1 . Здесь намагниченность ограничена условием $0 \leq N_1/L \leq 1/2$, т. е. мы имеем дело с возбуждениями вблизи ферромагнитного вакуума $|-, vac\rangle$. Благодаря симметрии Z_2 при спиновом отражении,

$\mathcal{E}_{N_1} = \mathcal{E}_{L-N_1}$, а возбуждения вблизи $|+, vac\rangle$ ($1/2 \leq N_1/L \leq 1$) можно рассматривать аналогично заменой $N_1 \rightarrow L - N_1$ в (4.67).

При бесконечном числе перевернутых вверх спинов

$$\lim_{L \rightarrow \infty} N_1/L = 0, L$$

минимальная энергия принимает вид

$$\mathcal{E}_\infty = -2t \sinh \gamma + \mathcal{E}_0.$$

Таким образом, все основные состояния с фиксированной намагниченностью, которые отличаются от обоих ферромагнитных основных состояний бесконечным числом перевернутых спинов, имеют одинаковую энергию.

Известно, что при $|\Delta| > 1$ спиновая цепочка XXZ описывается массивными квазичастицами. Энергетическая щель между основным состоянием и элементарными возбуждениями в пределе $N_1 \rightarrow \infty$ равна $\Delta E = -2t(\cosh \gamma - 1)$.

Подставив (4.67) в (4.66), получим значение N_1 , которое соответствует минимуму $E_N^{N_1}$ в (4.66):

$$N_1^{min} = \begin{cases} 0 & (U/2 + W \leq 0) \quad \text{или} \quad (0 < U/2 + W \leq \gamma/2, N \leq N_c), \\ N & (U/2 + W > 0) \quad \text{или} \quad (0 < U/2 + W \leq \gamma/2, N \geq N_c), \end{cases} \quad (4.68)$$

где N_c – решение уравнения

$$\tanh \frac{N_c}{2} \gamma = \left(\frac{U}{2} + W \right) N_c, \quad \frac{U}{2} - W > 0, \quad N_c > 0$$

Рассмотрим две области

$$\begin{aligned} U/2 + W &\leq 0, \quad W \leq 2t \\ 0 < U/2 + W &\leq \gamma/2, \quad N \leq N_c, \quad W \leq 2t \end{aligned} \quad (4.69)$$

в (4.68), где нет узлов, занятых одним фермионом. Основное состояние гамильтониана в N -частичном секторе (при четном N) описывается произвольным состоянием с $\mathcal{D} = N/2$ полностью занятыми узлами и $L - N/2$ пустыми узлами. Запишем

все эти состояния в виде

$$\psi_P^N = (\eta_P^+)^{N/2} |vac\rangle, \quad |vac\rangle = |0, 0, \dots, 0\rangle \quad (4.70)$$

Здесь через $\eta_P^\pm$ обозначаются операторы рождения-уничтожения так называемой фермионной η -пары с импульсом P :

$$\eta_P = \sum_{j=1}^L e^{iPj} c_{j,\uparrow} c_{j,\downarrow}, \quad \eta_P^+ = \sum_{j=1}^L e^{-iPj} c_{j,\downarrow}^+ c_{j,\uparrow}^+.$$

Заметим, что $\eta_0^\pm = \eta^\pm$.

Все состояния ψ_P^N удовлетворяют условию недиагонального дальнего порядка (off-diagonal long-range order, ODLRO):

$$\lim_{|i-j| \rightarrow \infty} \frac{\langle \psi_P^N | c_{j,\downarrow}^+ c_{j,\uparrow}^+ c_{i,\uparrow} c_{i,\downarrow} | \psi_P^N \rangle}{\langle \psi_P^N | \psi_P^N \rangle} \neq 0 \quad (4.71)$$

Отметим также, что операторы η_P^N удовлетворяют $\eta_P^N |vac\rangle = 0$. Как следствие, основные состояния ψ_P^N являются сверхпроводящими.

В обеих областях

$$U/2 + W > \gamma/2, \quad W \leq 2t,$$

$$0 < U/2 + W \leq \gamma/2, \quad N \geq N_c, \quad W \leq 2t$$

фазового пространства отсутствуют полностью заполненные узлы в основном состоянии (4.59). Эти состояния являются суперпозициями состояний с N одиночными фермионами, имеющими одинаковый спин. Конечно, они не обладают свойством ODLRO (4.71).

Проекция (4.59) на частично-заполненные состояния, приводит к $t - J$ гамильтониану при нулевом спин-спиновом взаимодействии $J = 0$ (4.49) с дополнительным граничным членом $W_1(n_1 + n_L)$. Как было сказано выше, эта модель является интегрируемой и эквивалентна магнетику Гайзенберга. Заметим, что эта эквивалентность видна из (4.49). При ограничении $\mathcal{H}(t, W, \mu)$ на состояния с одним фермионом с заданным спином ($\uparrow$ или $\downarrow$) на каждом узле получаем фермионное

представление XXZ модели

$$\mathcal{H}_{XXZ}(t, W_1, W_2, \mu) = \sum_{i=1}^{L-1} -t(c_i^+ c_{i+1} + c_{i+1}^+ c_i) + W \sum_{i=1}^{L-1} n_i n_{i+1} + \mu \sum_{i=1}^L n_i. \quad (4.72)$$

Для потенциалов взаимодействия, выделенных условием $W_1 = -W_2 = W$, гамильтониан рассматриваемой системы сильно упрощается. С точностью до граничных членов он равен:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(t, W) = \sum_{i=1}^{L-1} \sum_{\sigma=\uparrow, \downarrow} & [-t(c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma} + c_{i+1,\sigma}^+ c_{i,\sigma}) \\ & + t(c_{i,\sigma}^+ c_{i+1,\sigma} + c_{i+1,\sigma}^+ c_{i,\sigma})(n_{i,-\sigma} + n_{i+1,-\sigma})] + U \sum_{i=1}^L d_i + \mu \sum_{i=1}^L n_i. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Это – модель Хаббарда с взаимодействием между кинетическим членом и зарядом двух соседних узлов (bond-charge interaction). На старшем весовом пространстве он совпадает с XY моделью во внешнем магнитном поле, что эквивалентно свободным фермионам с химическим потенциалом ($\Delta = 0$ в (4.61)). Таким образом, $\mathcal{H}(t, W)$ точно решаем и имеет те же уровни энергии, что и модель свободных фермионов с химическим потенциалом, но теперь каждый уровень энергии обладает дополнительным вырождением.

Гамильтониан (4.73) $\mathcal{D}$ было получен и точно решен в [113, 174]. В нашей конструкции его интегрируемость очевидна, потому что ограничение $\mathcal{H}^0(t, W = 0)$ (4.73) на пространство старшего веса совпадает с обычной XY спиновой цепочкой, которая соответствует также свободным бесспиновым фермионам. Как было показано в работе [174], гамильтониан (4.73) обладает сверхпроводящим основным состоянием. Заметим, что здесь мы не рассматриваем антиферромагнитную область, которая описывается условием $\Delta = 0$. Мы полагаем, что и в этой области (4.59) имеет сверхпроводящее основное состояние, удовлетворяющее механизму η пар.

4.6 Приложение

Напомним, определение квантовой группы Каца-Муди $U_q\hat{g}$ (U_qg) [107, 108, 47]. Она порождается элементами e_i , f_i , h_i , удовлетворяющими соотношениям

$$[h_i, e_j] = c_{ij}e_j, \quad [h_i, f_j] = -c_{ij}f_j, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij}[h]_q, \quad (4.74)$$

а также q -деформированным соотношениям Серра, которые мы опускаем. Здесь $i = 0, \dots, n$ для $U_q\hat{g}$, и $i = 1, \dots, n$ для U_qg . q является параметром деформации,

$$[x]_q := \frac{x^q - x^{-q}}{q - q^{-1}}.$$

c_{ij} является матрицей Картана соответствующий аффинной алгебры Ли $\hat{g}$ (конечной алгебре Ли g).

Квантовая алгебра $U_q\hat{g}$ (U_qg) обладает структурой алгебры Хопфа:

$$\begin{aligned} \Delta(e_i) &= k_i \otimes e_i + e_i \otimes k_i^{-1}, & \Delta(k_i^{\pm 1}) &= k_i^{\pm 1} \otimes k_i^{\pm 1}, \\ \Delta(f_i) &= k_i \otimes f_i + f_i \otimes k_i^{-1}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

где $k_i := q^{\frac{h_i}{2}}$. Это коумножение распространяется также на L -кратное тензорное произведение

$$\begin{aligned} \Delta^{L-1}(e_i) &= \sum_{l=1}^L k_i \otimes \dots \otimes k_i \otimes \underbrace{e_i}_l \otimes k_i^{-1} \otimes \dots \otimes k_i^{-1}, \\ \Delta^{L-1}(f_i) &= \sum_{l=1}^L k_i \otimes \dots \otimes k_i \otimes \underbrace{f_i}_l \otimes k_i^{-1} \otimes \dots \otimes k_i^{-1}, \\ \Delta^{L-1}(k_i^{\pm 1}) &= k_i^{\pm 1} \otimes \dots \otimes k_i^{\pm 1}. \end{aligned}$$

Существует противоположное коумножение $\bar{\Delta}$, которое получается из (4.75) заменой $k_i^{\pm 1} \rightarrow k_i^{\mp 1}$.

Для общих значений q представления квантовой группы U_qg однозначно получаются из представлений недеформированной алгебры Ли g при $q = 1$. Обозначим через $\mathbf{V}_\lambda$ неприводимый U_qg -мультиплет со старшим весом v_λ^0 . Ему соответствует

старший вектор v_λ^0 , удовлетворяющий соотношениям

$$e_i v_\lambda^0 = 0 \quad h_i v_\lambda^0 = \lambda(h_i) v_\lambda^0, \quad i = 1, \dots, n \quad (4.76)$$

Пусть $\hat{g}$ – аффинная алгебра и g – ее базовая конечная алгебра. Тогда для любых комплексных x имеется q -деформация гомоморфизма $\rho_x: U_q \hat{g} \rightarrow U_q g$, определенная в работе [107]:

$$\begin{aligned} \rho_x(e_0) &= x f_\theta, & \rho_x(f_0) &= x^{-1} e_\theta, & \rho_x(h_0) &= -h_\theta, \\ \rho_x(e_i) &= e_i, & \rho_x(f_i) &= f_i, & \rho_x(h_i) &= h_i, \end{aligned}$$

где $i = 1 \dots n$, а θ – старший корень $U_q g$. Используя ρ_x , из представления $U_q g$ можно построить представление $U_q \hat{g}$, зависящее от спектрального параметра.

Пусть $\mathbf{V}_1(x_1)$ и $\mathbf{V}_2(x_2)$ – построенные таким способом конечномерные неприводимые представления $U_q \hat{g}$ с параметрами x_1 и x_2 соответственно. Оба $U_q \hat{g}$ -представления на $\mathbf{V}_1(x_1) \otimes \mathbf{V}_2(x_2)$, построенные с использованием Δ и $\bar{\Delta}$, в общем случае неприводимы и эквивалентны:

$$R(x_1, x_2) \Delta(g) = \bar{\Delta}(g) R(x_1, x_2).$$

R -матрица $R(x_1, x_2)$ зависит лишь от x_1/x_2 . Она соответствует больцмановскому весу некоторой интегрируемой системы статистической механики.

Заключение

В заключении перечислим основные результаты диссертационной работы.

1. Построены интегралы движения сферической механики, соответствующей угловой части рациональной модели Калоджеро, используя редукцию из матричной модели. Эти интегралы соответствуют синглетам группы $SU(N) \times SL(2, R)$, что позволяет использовать графическое описание для их построения и дальнейшей классификации. Приведены явные выражения для всех функционально независимых интегралов движения вплоть до шестого порядка по импульсам. Установлена связь развитой диаграммной техники с базисными синглетными состояниями обычных квантовых спинов, построенных с использованием парных валентных связей.

Разработана процедура построения интегралов движения соответствующей сферической механики, исходя из интеграла движения базовой конформной механики определённой конформной размерности. Для системы Калоджеро указанная процедура определяет другой метод построения сферических интегралов. Для сферической части четырехчастичной модели Калоджеро с исключенным центром масс построен таким образом полный набор функционально-независимых интегралов движения.

2. Исследована трёхмерная фазовая диаграмма лестничной модели со спином $1/2$ с дополнительными диагональными взаимодействиями, которая содержит, как частный случай, множество хорошо известных ранее исследован-

ных моделей. Доказано наличие только трех различных трёхмерных квантовых фаз: ферромагнитной фазы и двух массивных антиферромагнитных фаз Холдейна с различным топологическим порядком. С использованием ренормгруппового метода для матрицы плотности (DMRG) численно вычислена с достаточной точностью поверхность фазового перехода, разделяющая эти фазы. Некоторые части этой поверхности, разделяющие две массовые фазы Холдейна, являются критическими с нулевой щелью (массой) и нулевым строковым топологическим параметром порядка. Остальная ее область соответствует фазовому переходу первого рода с конечной щелью и двум вырожденным синглетным основным состояниям. Показана, что хотя топология этих двух фаз различается, их термодинамические свойства вблизи критической поверхности одинаковы.

3. Сформулировано и доказано обобщение теоремы Либа-Маттиса об антиферромагнитном упорядочении уровней энергии для системы спинов $1/2$ на лестничной решетке, инвариантной относительно продольной оси симметрии решетки, с дополнительными диагональными взаимодействиями и с открытыми границами. Доказано, что для широкой области значений параметров минимальные уровни $E(S, \sigma)$ в секторах с определенными значениями спина S и четности (при отражении) $\sigma = \pm 1$ монотонно растут с ростом спина при неизменной четности: $E(S_1, \sigma) > E(S_2, \sigma)$ при $S_1 > S_2$. Уровень $E(S, \sigma)$ образован всеми состояниями одного мультиплета спина S . В этом смысле он не вырожден. Основное состояние антиферромагнитной системы с N ступенями является невырожденным спин-синглетом с четностью $\sigma = (-1)^N$, или невырожденным триплетом с четностью $\sigma = (-1)^{N+1}$, либо их вырожденной комбинацией, что характерно для цепочки Халдейна спина 1.

Аналогичное свойство доказано также для спиновой лестницы с четырехпи-

новым циклическим обменным взаимодействием, а также при наличии граничной примеси. Частичные результаты получены для периодической системы.

4. Сформулировано и доказано обобщение теоремы Либа-Маттиса об антиферромагнитном упорядочении уровней энергии для расширенной многозонной одномерной модели Хаббарда с $SU(n)$ симметрией, включающей в себя парные перескоки электронов, спиновый обмен и произвольный потенциал на узле. Минимальные уровни $E(\mathbb{Y})$ в отдельных секторах, которые объединяют эквивалентные представления и характеризуются диаграммами Юнга $\mathbb{Y}$, упорядочены в соответствии с доминантным порядком для этих диаграмм: $E(\mathbb{Y}_1) > E(\mathbb{Y}_2)$ при $\mathbb{Y}_1 \succ \mathbb{Y}_2$. Уровень $E(\mathbb{Y})$ не вырожден, то есть соответствующие собственные состояния составляют один $\mathbb{Y}$ мультиплет. Основное состояние цепочки с M фермионами образует невырожденный антисимметричный $SU(N)$ мультиплет порядка $k = M \bmod N$ и размерности $d = \binom{N}{k}$. Он является синглетом, если M кратно N .

Построены и исследовано семейство интегрируемых расширений обычной цепочки Хаббарда. Отличительным свойством этого семейства гамильтонианов является сильное вырождение уровней энергии, которое является следствием достаточно широкой симметрии относительно аффинной квантовой группы. Установлено, что основное состояние одного из представителей данного семейства обладает сверхпроводящим свойством через механизм η спаривания электронов.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность докторам физико-математических наук Ара Седракяну, Армену Нерсисяну, Олафу Лехтендельду и Сергею Кривоносу за плодотворное сотрудничество.

Литература

- [1] A. G. Abanov and P. B. Wiegmann. *Quantum hydrodynamics, the quantum Benjamin-Ono equation, and the Calogero model*, Physical Review Letters **95**: 076402 (2005).
- [2] I. Affleck and E. H. Lieb. *A proof of part of Haldane conjecture on spin chains*, Letters in Mathematical Physics **12**: 57–69 (1986).
- [3] I. Affleck et al. *Rigorous results on valence-bond ground states in antiferromagnets*, Physical Review Letters **59**: 799–802 (1987).
- [4] I. Affleck et al. *Valence bond ground states in isotropic quantum antiferromagnets*, Communications in Mathematical Physics **115**: 477–528 (1988).
- [5] M. Aguado et al. *Density-matrix renormalization-group simulation of the $SU(3)$ antiferromagnetic Heisenberg model*, Physical Review B **79**: 012408 (2009).
- [6] G. Albertini, V. E. Korepin, and A. Schadschneider. *XXZ model as an effective Hamiltonian for generalized Hubbard models with broken η -symmetry*, Journal of Physics A: Mathematical General **28**: L303–L309 (1995).
- [7] F. C. Alcaraz et al. *Finite chains with quantum affine symmetries*, International Journal of Modern Physics A **9**: 3473–3496 (1994).
- [8] D. Allen, F. H. L. Essler, and A. A. Nersesyan. *Fate of spinons in spontaneously dimerized spin- $\frac{1}{2}$ ladders*, Physical Review B **61**: 8871–8877 (2000).

- [9] J. Ambjorn et al. *A new family of integrable extended multi-band Hubbard Hamiltonians*, Modern Physics Letters A **13**: 495–503 (1998).
- [10] J. Ambjorn et al. *Bethe Ansatz and thermodynamic limit of affine quantum group invariant extensions of the t - J model*, Journal of Mathematical Physics **40**: 5687–5701 (1999).
- [11] P. W. Anderson. *Resonating valence bonds - new kind of insulator*, Materials Research Bulletin **8**: 153–160 (1973).
- [12] P. W. Anderson. *The resonating valence bond state in La_2CuO_4 and superconductivity*, Science **235**: 1196–1198 (1987).
- [13] A. Angelucci and S. Sorella. *Some exact results for the multicomponent t - J model*, Physical Review B **54**: 12657 (1996).
- [14] A. Avakyan, T. Hakobyan, and A. Sedrakyan. *A family of affine quantum group invariant integrable extensions of the Hubbard Hamiltonian*, Nuclear Physics B **490**: 633–652 (1997).
- [15] A. Avakyan, T. Hakobyan, and A. Sedrakyan. *Integrable extensions of Hubbard Hamiltonian*, International Journal of Modern Physics B **11**: 3207–3222 (1997).
- [16] J. Avan and E. Billey. *Observable algebras for the rational and trigonometric Euler-Calogero-Moser Models*, Physics Letters A **198**: 183–194 (1995).
- [17] H. Azuma and S. Iso. *Explicit relation of the quantum Hall effect and the Calogero-Sutherland model*, Physics Letters B **331**: 107–113 (1994).
- [18] H. M. Babujian. *Exact solution of the one-dimensional isotropic Heisenberg chain with arbitrary spins S* , Physics Letters A **90**: 479–482 (1982).
- [19] K. Bärwinkel et al. *Quantum numbers for relative ground states of antiferromagnetic Heisenberg spin rings*, Physical Review B **68**: 054422 (2003).

- [20] S. Bellucci, S. Krivonos, and A. Sutulin. *$N=4$ supersymmetric 3-particles Calogero model*, Nuclear Physics B **805**: 24–39 (2008).
- [21] S. Benenti, C. Chanu, and G. Rastelli. *The super-separability of the three-body inverse-square Calogero system*, Journal of Mathematical Physics **41**: 4654–4678 (2000).
- [22] D. Bernard et al. *Yang-Baxter equation in long-range interacting systems*, Journal of Physics A: Mathematical General **26**: 5219–5236 (1993).
- [23] H. Bethe. *Zur Theorie der Metalle*, Zeitschrift fur Physik **71**: 205–226 (1931).
- [24] R. F. Bishop, D. J. J. Farnell, and J. B. Parkinson. *Phase transitions in the spin-half $J_1 - J_2$ model*, Physical Review B **58**: 6394–6402 (1998).
- [25] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, and K. Kokkotas. *Deformed oscillator algebras for two-dimensional quantum superintegrable systems*, Physical Review A **50**: 3700–3709 (1994).
- [26] H. W. Braden. *Rigidity, functional equations and the Calogero-Moser model*, Journal of Physics A: Mathematical General **34**: 2197–2204 (2001).
- [27] S. T. Bramwell and M. J. P. Gingras. *Spin Ice State in Frustrated Magnetic Pyrochlore Materials*, Science **294**: 1495–1501 (2001).
- [28] S. Brehmer, H. Mikeska, and U. Neugebauer. *The phase diagram and hidden order for generalized spin ladders*, Journal of Physics: Condensed Matter **8**: 7161–7177 (1996).
- [29] S. Brehmer et al. *Effects of biquadratic exchange on the spectrum of elementary excitations in spin ladders*, Physical Review B **60**: 329–334 (1999).
- [30] T. Brzeziński et al. *A note on the action-angle variables for the rational Calogero-Moser system*, Physics Letters A **268**: 178–180 (2000).

- [31] F. Calogero. *Solution of a Three-Body Problem in One Dimension*, Journal of Mathematical Physics **10**: 2191–2196 (1969).
- [32] F. Calogero. *Solution of the One-Dimensional N -Body Problems with Quadratic and/or Inversely Quadratic Pair Potentials*, Journal of Mathematical Physics **12**: 419–436 (1971).
- [33] F. Calogero and C. Marchioro. *Exact solution of a one-dimensional three-body scattering problem with two-body and/or three-body inverse-square potentials*, Journal of Mathematical Physics **15**: 1425–1430 (1974).
- [34] R. Caseiro, J.-P. Francoise, and R. Sasaki. *Quadratic algebra associated with rational Calogero-Moser models*, Journal of Mathematical Physics **42**: 5329–5340 (2001).
- [35] G. Castilla, S. Chakravarty, and V. J. Emery. *Quantum magnetism of CuGeO_3* , Physical Review Letters **75**: 1823–1826 (1995).
- [36] V. Chari and A. Pressley. *Quantum affine algebras*, Communications in Mathematical Physics **142**: 261–283 (1991).
- [37] X. Chen et al. *Symmetry-Protected Topological Orders in Interacting Bosonic Systems*, Science **338**: 1604 (2012).
- [38] R. Chitra et al. *Density-matrix renormalization-group studies of the spin-1/2 Heisenberg system with dimerization and frustration*, Physical Review B **52**: 6581–6587 (1995).
- [39] E Dagotto. *Experiments on ladders reveal a complex interplay between a spin-gapped normal state and superconductivity*, Reports on Progress in Physics **62**: 1525–1571 (1999).
- [40] E. Dagotto and T. M. Rice. *Surprises on the way from one- to two-dimensional quantum magnets: The ladder materials*, Science **271**: 618–623 (1996).

- [41] B. Davies et al. *Diagonalization of the XXZ Hamiltonian by vertex operators*, Communications in Mathematical Physics **151**: 89–153 (1993).
- [42] J. de Boer, V. E. Korepin, and A. Schadschneider. *η pairing as a mechanism of superconductivity in models of strongly correlated electrons*, Physical Review Letters **74**: 789–792 (1995).
- [43] J. de Boer and A. Schadschneider. *Exact ground states of generalized Hubbard models*, Physical Review Letters **75**: 4298–4301 (1995).
- [44] M. den Nijs and K. Rommelse. *Preroughening transitions in crystal surfaces and valence-bond phases in quantum spin chains*, Physical Review B **40**: 4709–4734 (1989).
- [45] H. T. Diep. "*Frustrated Spin Systems*". World Scientific. 2005.
- [46] D. V. Dmitriev, V. Y. Krivnov, and A. A. Ovchinnikov. *Exact ground states for a class of one-dimensional frustrated quantum spin models*, Physical Review B **56**: 5985–5995 (1997).
- [47] V. G. Drinfeld. *Quantum groups*, ICM proceedings, New-York: Berkeley **10**: 798–820 (1986).
- [48] F. J. Dyson. *Statistical Theory of the Energy Levels of Complex Systems. I*, Journal of Mathematical Physics **3**: 140–156 (1962).
- [49] S. Eggert. *Numerical evidence for multiplicative logarithmic corrections from marginal operators*, Physical Review B **54**: R9612–R9615 (1996).
- [50] V. J. Emery and C. Noguera. *Critical properties of a spin-1/2 chain with competing interactions*, Physical Review Letters **60**: 631–634 (1988).
- [51] F. H. L. Essler, V. E. Korepin, and K. Schoutens. *New exactly solvable model of strongly correlated electrons motivated by high- T_c superconductivity*, Physical Review Letters **68**: 2960–2963 (1992).

- [52] F. H. L. Essler, V. E. Korepin, and K. Schoutens. *Electronic model for superconductivity*, Physical Review Letters **70**: 73–76 (1993).
- [53] P. Etingof and X. Ma. *Lecture notes on Cherednik algebras*, ArXiv e-prints. (2010).
- [54] S. Fedoruk, E. Ivanov, and O. Lechtenfeld. *Supersymmetric Calogero models by gauging*, Phys. Rev. D **79**: 105015 (2009).
- [55] L. Fehér, I. Tsutsui, and T. Fülöp. *Inequivalent quantizations of the three-particle Calogero model constructed by separation of variables*, Nuclear Physics B **715**: 713–757 (2005).
- [56] M. V. Feigin. *Intertwining Relations for the Spherical Parts of Generalized Calogero Operators*, Theoretical and Mathematical Physics **135**: 497–509 (2003).
- [57] J.-B. Fouet et al. *Condensation of magnons and spinons in a frustrated ladder*, Physical Review B **73**: 214405 (2006).
- [58] D. Z. Freedman and P. F. Mende. *An exactly solvable N -particle system in supersymmetric quantum mechanics*, Nuclear Physics B **344**: 317–343 (1990).
- [59] M. Gaudin. *"La fonction d'onde de Bethe"*. Masson, Science. 1983.
- [60] M. P. Gelfand. *Linked-tetrahedra spin chain: Exact ground state and excitations*, Physical Review B **43**: 8644–8645 (1991).
- [61] G. W. Gibbons and P. K. Townsend. *Black holes and Calogero models*, Physics Letters B **454**: 187–192 (1999).
- [62] J. Gibbons and T. Hermesen. *A generalisation of the Calogero-Moser system*, Physica D Nonlinear Phenomena **11**: 337–348 (1984).
- [63] C. Gómez and G. Sierra. *The quantum symmetry of rational conformal field theories*, Nuclear Physics B **352**: 791–828 (1991).

- [64] C. Gonera, P. Kosiński, and P. Maślanka. *A gauge theory of the Hamiltonian reduction for the rational Calogero-Moser system**, Physics Letters A **283**: 119–123 (2001).
- [65] A. V. Gorshkov et al. *Two-orbital $SU(N)$ magnetism with ultracold alkaline-earth atoms*, Nature Physics **6**: 289–295 (2010).
- [66] A. Gorsky and N. Nekrasov. *Hamiltonian systems of Calogero-type, and two-dimensional Yang-Mills theory*, Nuclear Physics B **414**: 213–238 (1994).
- [67] M. Greiter and S. Rachel. *Valence bond solids for $SU(n)$ spin chains: Exact models, spinon confinement, and the Haldane gap*, Physical Review B **75**: 184441 (2007).
- [68] V. Gritsev, B. Normand, and D. Baeriswyl. *Phase diagram of the Heisenberg spin ladder with ring exchange*, Physical Review B **69**: 094431 (2004).
- [69] H. Grosse et al. *On a quantum group invariant spin chain with non-local boundary conditions*, Journal of Physics A: Mathematical General **27**: 4761–4771 (1994).
- [70] M. C. Gutzwiller. *Effect of correlation on the ferromagnetism of transition metals*, Physical Review Letters **10**: 159–162 (1963).
- [71] T. Hakobyan. *The possibility of gapless excitations in antiferromagnetic spin chains with long-range interactions*, Journal of Physics A: Mathematical General **36**: L599–L604 (2003).
- [72] T Hakobyan. *The ordering of energy levels for $SU(N)$ symmetric antiferromagnetic chains*, Nuclear Physics B **699**: 575–594 (2004).
- [73] T. Hakobyan. “Reflection symmetry and energy-level ordering of frustrated ladder models”. In: *Proceedings of the Workshop ”Supersymmetries and Quantum Symmeries”*. Ed. by E. Ivanov and S. Fedoruk. JINR, 2008, 383–386.

- [74] T. Hakobyan. *Energy-level ordering for frustrated spin ladder models*, Physics of Atomic Nuclei **73**: 339–344 (2010).
- [75] T. Hakobyan, J. H. Hetherington, and M. Roger. “An overview on the phase diagram of frustrated two-leg ladder model”. In: *Proceedings of the Workshop “Low dimensional integrable models and their applications in field theory and statistical physics”*. Ed. by A. Bytsko and M. Karowski. 2001.
- [76] T. Hakobyan, J. H. Hetherington, and M. Roger. *Phase diagram of the frustrated two-leg ladder model*, Physical Review B **63**: 144433 (2001).
- [77] T. Hakobyan, O. Lechtenfeld, and A. Nersessian. *The spherical sector of the Calogero model as a reduced matrix model*, Nuclear Physics B **858**: 250–266 (2012).
- [78] T. Hakobyan and A. Sedrakyan. *Spin chain Hamiltonians with affine $U_q\mathfrak{g}$ symmetry*, Physics Letters B **377**: 250–254 (1996).
- [79] T. Hakobyan et al. *Delocalization of states in two-component superlattices with correlated disorder*, Physical Review B **61**: 11432–11436 (2000).
- [80] T. Hakobyan et al. *Invariants of the spherical sector in conformal mechanics*, Journal of Physics A: Mathematical General **44**: 055205 (2011).
- [81] T. Hakobyan et al. *Action-angle variables and novel superintegrable systems*, Physics of Particles and Nuclei **43**: 577–582 (2012).
- [82] T. Hakobyan et al. *Integrable generalizations of oscillator and Coulomb systems via action-angle variables*, Physics Letters A **376**: 679–686 (2012).
- [83] T. Hakobyan. *Energy-level ordering and ground-state quantum numbers for a frustrated two-leg spin-1/2 ladder*, Physical Review B **75**: 214421 (2007).

- [84] T. Hakobyan. *Antiferromagnetic ordering of energy levels for a spin ladder with four-spin cyclic exchange: Generalization of the Lieb-Mattis theorem*, Physical Review B **78**: 012407 (2008).
- [85] T. Hakobyan. *Ordering of energy levels for extended $SU(N)$ Hubbard chain*, Symmetry, Integrability and Geometry-Methods and Applications **6**: 024 (2010).
- [86] T. Hakobyan and A. Nersessian. *Lobachevsky geometry of (super)conformal mechanics*, Physics Letters A **373**: 1001–1004 (2009).
- [87] T. Hakobyan, A. Nersessian, and V. Yeghikyan. *The cuboctahedric Higgs oscillator from the rational Calogero model*, Journal of Physics A: Mathematical General **42**: 205206 (2009).
- [88] T. Hakobyan et al. *Hidden symmetries of integrable conformal mechanical systems*, Physics Letters A **374**: 801–806 (2010).
- [89] F. D. M. Haldane. *Nonlinear field theory of large-spin heisenberg antiferromagnets: semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy-axis Néel state*, Physical Review Letters **50**: 1153–1156 (1983).
- [90] F. D. M. Haldane. *Nonlinear field theory of large-spin Heisenberg antiferromagnets: Semiclassically quantized solitons of the one-dimensional easy-axis Néel State*, Physical Review Letters **50**: 1153–1156 (1983).
- [91] F. D. M. Haldane. *Exact Jastrow-Gutzwiller resonating-valence-bond ground state of the spin-1/2 antiferromagnetic Heisenberg chain with $1/r^2$ exchange*, Physical Review Letters **60**: 635–638 (1988).
- [92] F. D. M. Haldane. *“Spinon gas” description of the $S=1/2$ Heisenberg chain with inverse-square exchange: Exact spectrum and thermodynamics*, Physical Review Letters **66**: 1529–1532 (1991).

- [93] F. Haldane. *Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnet: Identification with the $O(3)$ nonlinear sigma model*, Physics Letters A **93**: 464–468 (1983).
- [94] M. Hamermesh. "*Group theory and its application to physical problems*". Dover, New York. 1989.
- [95] Y. Hatsuda and Y. Matsuo. *Symmetry and integrability of non-singlet sectors in matrix quantum mechanics*, Journal of Physics A: Mathematical General **40**: 1633–1659 (2007).
- [96] K. Hida. *Haldane gap in the spin-1/2 souble chain Heisenberg antiferromagnet – numerical diagonalization and projector Monte-Carlo study*, Journal of the Physical Society of Japan **60**: 1347–1354 (1991).
- [97] P. W. Higgs. *Dynamical symmetries in a spherical geometry. I*, Journal of Physics A: Mathematical General **12**: 309–323 (1979).
- [98] K. Hikami and M. Wadati. *Infinite Symmetry of the Spin Systems with Inverse Square Interactions*, Journal of the Physical Society of Japan **62**: 4203 (1993).
- [99] K. Hikami and M. Wadati. *Integrable systems with long-range interactions, W_∞ algebra, and energy spectrum*, Physical Review Letters **73**: 1191–1194 (1994).
- [100] T Hikihara, T Momoi, and X Hu. *Spin-chirality duality in a spin ladder with four-spin cyclic exchange*, Physical Review Letters **90**: 087204 (2003).
- [101] C. Honerkamp and W. Hofstetter. *Ultracold fermions and the $SU(N)$ Hubbard model*, Physical Review Letters **92**: 170403 (2004).
- [102] J. Hubbard. *Electron correlations in narrow energy bands*, Royal Society of London Proceedings Series A **276**: 238–257 (1963).
- [103] V. I. Inozemtsev. *On the connection between the one-dimensional $S=1/2$ Heisenberg chain and Haldane-Shastry model*, Journal of Statistical Physics **59**: 1143–1155 (1990).

- [104] M. V. Ioffe and A. I. Neelov. *Intertwining relations for the matrix Calogero-like models: supersymmetry and shape invariance*, Journal of Physics A: Mathematical General **35**: 7613–7628 (2002).
- [105] C. Jacobi. .. *Gesammelte Werke* **4**: 533 (1866).
- [106] A. Jevicki and H. Levine. *Semiclassical Approach to Planar Diagrams*, Physical Review Letters **44**: 1443–1446 (1980).
- [107] M. Jimbo. *A q -difference analogue of $U(g)$ and the Yang-Baxter equation*, Letters in Mathematical Physics **10**: 63–69 (1985).
- [108] M. Jimbo. *A q -analogue of $U(g(N+1))$, Hecke algebra, and the Yang-Baxter equation*, Letters in Mathematical Physics **11**: 247–252 (1986).
- [109] E. G. Kalnins, W. Miller, and G. S. Pogosyan. *Coulomb-oscillator duality in spaces of constant curvature*, Journal of Mathematical Physics **41**: 2629–2657 (2000).
- [110] M Karbach and K. Mutter. *The antiferromagnetic spin-1/2-xxz model on rings with an odd number of sites*, Journal Of Physics A: Mathematical General **28**: 4469–4479 (1995).
- [111] M. Karowski and A. Zapletal. *Quantum-group-invariant integrable n -state vertex models with periodic boundary conditions*, Nuclear Physics B **419**: 567–588 (1994).
- [112] E. H. Kim et al. *Phase transitions between topologically distinct gapped phases in isotropic spin ladders*, Physical Review B **62**: 14965–14974 (2000).
- [113] D. J. Klein. *Atomic limit and projected Hubbard models for a linear chain*, Physical Review B **8**: 3452–3458 (1973).
- [114] A. Kolezhuk, R. Roth, and U. Schollwöck. *First order transition in the frustrated antiferromagnetic Heisenberg $s = 1$ quantum spin chain*, Physical Review Letters **77**: 5142–5145 (1996).

- [115] V. B. Kuznetsov. *Hidden symmetry of the quantum Calogero-Moser system*, Physics Letters A **218**: 212–222 (1996).
- [116] C. Lacroix, P. Mendels, and F. Mila. "*Introduction to Frustrated Magnetism*". 2011.
- [117] P Lancaster. "*Theory of Matrices*". Academic, New York. 1969.
- [118] L. Landau and L. Lifshitz. "*Quantum Mechanics. Non-relativistic Theory*". Elsevier Science. 1977.
- [119] R. B. Laughlin. *Anomalous quantum Hall effect - An incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations*, Physical Review Letters **50**: 1395–1398 (1983).
- [120] P. Lecheminant and K. Totsuka. *Competing orders and hidden duality symmetries in two-leg spin ladder systems*, Physical Review B **74**: 224426 (2006).
- [121] H. I. Leemon. *Dynamical symmetries in a spherical geometry. II*, Journal of Physics A: Mathematical General **12**: 489–501 (1979).
- [122] C. Lhuillier and G. Misguich. "Frustrated Quantum Magnets". In: *High Magnetic Fields*. Ed. by C. Berthier, L. P. Lévy, and G. Martinez. Vol. 595. Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag. 2002, pp. 161–190. eprint: [arXiv:cond-mat/0109146](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0109146).
- [123] Y.-Q. Li et al. *Ground state and excitations of a four-component fermion model*, Physical Review B **70**: 233105 (2004).
- [124] Y.-Q. Li. *Rigorous results for a hierarchy of generalized Heisenberg models*, Physical Review Letters **87**: 127208 (2001).
- [125] E. Lieb and D. Mattis. *Ordering energy levels of interacting spin systems*, Journal of Mathematical Physics **3**: 749–& (1962).

- [126] E. Lieb and D. Mattis. *Ordering energy levels of interacting spin systems*, Journal of Mathematical Physics **3**: 749–751 (1962).
- [127] E. Lieb and D. Mattis. *Theory of ferromagnetism and the ordering of electronic energy levels*, Physical Review **125**: 164–172 (1962).
- [128] E. Lieb, T. Schultz, and D. Mattis. *Two soluble models of an antiferromagnetic chain*, Annals of Physics **16**: 407–466 (1961).
- [129] E. H. Lieb and P. Schupp. *Singlets and reflection symmetric spin systems*, Physica A **279**: 378–385 (2000).
- [130] E. H. Lieb and F. Y. Wu. *Absence of Mott transition in an exact solution of the short-range, one-band model in one dimension*, Physical Review Letters **20**: 1445–1448 (1968).
- [131] E. H. Lieb. *Two theorems on the Hubbard model*, Physical Review Letters **62**: 1201–1204 (1989).
- [132] E. H. Lieb and P. Schupp. *Ground state properties of a fully frustrated quantum spin system*, Physical Review Letters **83**: 5362–5365 (1999).
- [133] Y.-J. Liu et al. *Validity of the Lieb-Mattis theorem in the $J_1 - J_2$ Heisenberg model*, Physical Review B **66**: 024403 (2002).
- [134] I. G. Macdonald. *"Symmetric functions and Hall polynomials"*. Oxford University Press, New York. 1979.
- [135] C. K. Majumdar and D. K. Ghosh. *On next-nearest-neighbor interaction in linear chain I*, J. Math. Phys. **10**: 1388 (1969).
- [136] M. Mambrini. *Hard-core dimer aspects of the $SU(2)$ singlet wave function*, Physical Review B **77**: 134430 (2008).
- [137] W. Marshall. *Antiferromagnetism*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **232**: 48–68 (1955).

- [138] J. B. Marston and I. Affleck. *Large- n limit of the Hubbard–Heisenberg model*, Physical Review B **39**: 11538–11558 (1989).
- [139] P. P. Martin. "*Potts models and related problems in statistical mechanics*". World Scientific, Singapore. 1991.
- [140] M. Martin-Delgado, J. Dukelsky, and G. Sierra. *Phase diagram of the 2-leg Heisenberg ladder with alternating dimerization*, Physics Letters A **250**: 430–434 (1998).
- [141] M. A. Martín-Delgado, R. Shankar, and G. Sierra. *Phase transitions in staggered spin ladders*, Physical Review Letters **77**: 3443–3446 (1996).
- [142] D. Mattis. "*The theory of magnetism made simple*". World Scientific. 2004.
- [143] F. Mila. "Quantum frustrated magnets: From theory to experiments". In: *Recent Progress in Many-Body Theories*. Ed. by R. F. Bishop et al. Dec. 2002, pp. 80–89. DOI: 10.1142/9789812777843_0010.
- [144] J. A. Minahan and A. P. Polychronakos. *Interacting fermion systems from two-dimensional QCD*, Physics Letters B **326**: 288–294 (1994).
- [145] R. Moessner. *Magnets with strong geometric frustration*, Canadian Journal of Physics **79**: 1283–1294 (2001).
- [146] T Momoi et al. *Scalar chiral ground states of spin ladders with four-spin exchanges*, Physical Review B **67**: 174410 (2003).
- [147] A. Montorsi and D. K. Campbell. *Rigorous results on superconducting ground states for attractive extended Hubbard models*, Physical Review B **53**: 5153–5156 (1996).
- [148] G. Moore and N. Reshetikhin. *A comment on quantum group symmetry in conformal field theory*, Nuclear Physics B **328**: 557–574 (1989).

- [149] J. Moser. *Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations*, Adv. Math. **16**: 197–220 (1975).
- [150] M Muller, T Vekua, and H. Mikeska. *Perturbation theories for the $S=1/2$ spin ladder with a four-spin ring exchange*, Physical Review B **66**: (2002).
- [151] M Muller, T Vekua, and H. Mikeska. *Ring exchange in low-dimensional spin systems*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials **272**: 904–905 (2004).
- [152] R. G. Munro. *Extension of a theorem on antiferromagnetism to include biquadratic exchange*, Physical Review B **13**: 4875–4876 (1976).
- [153] B. Nachtergaele, W. Spitzer, and S. Starr. *Ferromagnetic ordering of energy levels*, Journal of Statistical Physics **116**: 719–738 (2004).
- [154] A. Nersessian and G. Pogosyan. *Relation of the oscillator and Coulomb systems on spheres and pseudospheres*, Physical Review A **63**: 020103 (2001).
- [155] A. Nersessian and V. Yeghikyan. *Anisotropic inharmonic Higgs oscillator and related (MICZ-)Kepler-like systems*, Journal of Physics A: Mathematical General **41**: 155203 (2008).
- [156] A. A. Nersesyan and A. M. Tsvelik. *One-Dimensional Spin-Liquid without Magnon Excitations*, Physical Review Letters **78**: 3939–3942 (1997).
- [157] A. A. Nersesyan and A. M. Tsvelik. *Spinons in more than one dimension: Resonance valence bond state stabilized by frustration*, Physical Review B **67**: 024422 (2003).
- [158] H. T. Nieh, G. Su, and B.-H. Zhao. *Off-diagonal long-range order: Meissner effect and flux quantization*, Physical Review B **51**: 3760–3764 (1995).
- [159] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov. *Quantum completely integrable systems connected with semi-simple Lie algebras*, Letters in Mathematical Physics **2**: 7–13 (1977).

- [160] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov. *Classical integrable finite-dimensional systems related to Lie algebras*, Phys. Rep. **71**: 313–400 (1981).
- [161] M. A. Olshanetsky and A. M. Perelomov. *Quantum integrable systems related to lie algebras*, Phys. Rep. **94**: 313–404 (1983).
- [162] A. A. Ovchinnikov. *Metal-insulator transition in the generalized Hubbard model*, Journal of Physics: Condensed Matter **6**: 11057–11069 (1994).
- [163] V. Pasquier and H. Saleur. *Common structures between finite systems and conformal field theories through quantum groups*, Nuclear Physics B **330**: 523–556 (1990).
- [164] A. P. Polychronakos. *Non-relativistic bosonization and fractional statistics*, Nuclear Physics B **324**: 597–622 (1989).
- [165] A. P. Polychronakos. *Waves and Solitons in the Continuum Limit of the Calogero-Sutherland Model*, Physical Review Letters **74**: 5153–5157 (1995).
- [166] A. P. Polychronakos. “Course 5: generalized statistics in one dimension”. In: *Topological Aspects of Low Dimensional Systems*. Ed. by A. Comtet, T. Jolicoeur, S. Ouvry, & F. David. 1999, p. 415. eprint: [arXiv:hep-th/9902157](https://arxiv.org/abs/hep-th/9902157).
- [167] A. P. Polychronakos. *The physics and mathematics of Calogero particles*, Journal of Physics A: Mathematical General **39**: 12793–12845 (2006).
- [168] S. Rachel et al. *Spinon confinement and the Haldane gap in $SU(n)$ spin chains*, Physical Review B **80**: 180420 (2009).
- [169] M. Reed and B. Simon. "*Methods of modern mathematical physics, vol III*". New York: Academic. 1978.
- [170] J. Richter et al. *Ground-state phase-relationships and level ordering for frustrated quantum antiferromagnets*, Journal of Low Temperature Physics **99**: 363–365 (1995).

- [171] J. Richter et al. *Marshall-Peierls phase rule and lieb-mattis level ordering in non-bipartite low-dimensional antiferromagnets*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials **140**: 1611–1612 (1995).
- [172] M. Roger. *Ring exchange and correlated fermions*, Journal of Physics and Chemistry of Solids **66**: 1412–1416 (2005).
- [173] M. Roger and J. M. Delrieu. *Cyclic four-spin exchange on a two-dimensional square lattice: Possible applications in high- T_c superconductors*, Physical Review B **39**: 2299–2303 (1989).
- [174] A. Schadschneider. *Superconductivity in an exactly solvable Hubbard model with bond-charge interaction*, Physical Review B **51**: 10386–10391 (1995).
- [175] P. Schlottmann. *Integrable narrow-band model with possible relevance to heavy-fermion systems*, Physical Review B **36**: 5177–5185 (1987).
- [176] H. J. Schmidt and M. Luban. *Classical ground states of symmetric Heisenberg spin systems*, Journal of Physics A: Mathematical General **36**: 6351–6378 (2003).
- [177] K. P. Schmidt and G. S. Uhrig. *Spectral properties of magnetic excitations in cuprate two-leg ladder systems*, Modern Physics Letters B **19**: 1179–1205 (2005).
- [178] J. Schnack. *Frustration-induced exotic properties of magnetic molecules*, eprint arXiv:cond-mat/0510355. (2005).
- [179] G. L. Sewell. *Off-diagonal long-range order and the Meissner effect*, Journal of Statistical Physics **61**: 415–422 (1990).
- [180] B. S. Shastry. *Exact solution of an $S=1/2$ Heisenberg antiferromagnetic chain with long-ranged interactions*, Physical Review Letters **60**: 639–642 (1988).
- [181] B. S. Shastry and B. Sutherland. *Excitation spectrum of a dimerized next-neighbor antiferromagnetic chain*, Physical Review Letters **47**: 964–967 (1981).

- [182] S. Shen. *Strongly correlated electron systems: Spin-reflection positivity and some rigorous results*, International Journal of Modern Physics B **12**: 709–779 (1998).
- [183] P. Sindzingre. *Spin-1/2 frustrated antiferromagnet on a spatially anisotropic square lattice: Contribution of exact diagonalizations*, Physical Review B **69**: 094418 (2004).
- [184] R. G. Smirnov and P. Winternitz. *A class of superintegrable systems of Calogero type*, Journal of Mathematical Physics **47**: 093505 (2006).
- [185] J. Sólyom and J. Timonen. *Anisotropic Heisenberg chain with composite spin*, Physical Review B **34**: 487–489 (1986).
- [186] J. Solyom and J. Timonen. *Anisotropic Heisenberg chain with composite spin*, Physical Review B **34**: 487–489 (1986).
- [187] O. A. Starykh and L. Balents. *Dimerized phase and transitions in a spatially anisotropic square lattice antiferromagnet*, Physical Review Letters **93**: 127202 (2004).
- [188] R. Strack. *Exact ground-state energy of the periodic Anderson model in $d=1$ and extended Emery models in $d=1,2$ for special parameter values*, Physical Review Letters **70**: 833–836 (1993).
- [189] R. Strack and D. Vollhardt. *Hubbard model with nearest-neighbor and bond-charge interaction: Exact ground-state solution in a wide range of parameters*, Physical Review Letters **70**: 2637–2640 (1993).
- [190] R. Strack and D. Vollhardt. *Rigorous criteria for ferromagnetism in itinerant electron systems*, Physical Review Letters **72**: 3425–3428 (1994).
- [191] J. Struck et al. *Quantum Simulation of Frustrated Classical Magnetism in Triangular Optical Lattices*, Science **333**: 996 (2011).

- [192] B. Sutherland. *Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension*, Physical Review A **4**: 2019–2021 (1971).
- [193] B. Sutherland. *Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension. II*, Physical Review A **5**: 1372–1376 (1972).
- [194] B. Sutherland. *Model for a multicomponent quantum system*, Physical Review B **12**: 3795–3805 (1975).
- [195] B. Sutherland. *Model for a multicomponent quantum system*, Physical Review B **12**: 3795–3805 (1975).
- [196] M Takahashi. *Half-filled Hubbard model at low temperature*, Journal Of Physics C: Condensed Matter **10**: 1289–1301 (1977).
- [197] H. N. V. Temperley and E. H. Lieb. *Relations between the 'percolation' and 'colouring' problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the 'percolation' problem*, Royal Society of London Proceedings Series A **322**: 251–280 (1971).
- [198] D. J. Thouless. *Exchange in solid ^3He and the Heisenberg Hamiltonian*, Proceedings of the Physical Society **86**: 893–904 (1965).
- [199] D. A. Varshalovich, A. Moskalev, and V. Khersonskii. "*Quantum Theory of Angular Momentum*". Moscow. 1988.
- [200] X. Wang. *Low-lying energy properties of a frustrated antiferromagnetic spin-1/2 ladder*, Mod. Physics Letters B **14**: 327 (2000).
- [201] H. Watanabe. *Numerical diagonalization study of an $S=1/2$ ladder model with open boundary conditions*, Physical Review B **50**: 13442–13448 (1994).
- [202] Z. Weihong, V. Kotov, and J. Oitmaa. *Two-chain spin ladder with frustrating second-neighbor interactions*, Physical Review B **57**: 11439–11445 (1998).

- [203] S. R. White. *Density matrix formulation for quantum renormalization groups*, Physical Review Letters **69**: 2863–2866 (1992).
- [204] S. R. White. *Density-matrix algorithms for quantum renormalization groups*, Physical Review B **48**: 10345–10356 (1993).
- [205] S. R. White. *Equivalence of the antiferromagnetic Heisenberg ladder to a single $S=1$ chain*, Physical Review B **53**: 52–55 (1996).
- [206] S. R. White and D. A. Huse. *Numerical renormalization-group study of low-lying eigenstates of the antiferromagnetic $S=1$ Heisenberg chain*, Physical Review B **48**: 3844–3852 (1993).
- [207] E. Wigner. "*Gruppentheorie und ihre Anwendungen auf die Quantenmechanik der Atomspektren*". Vieweg Verlag, Braunschweig. 1931.
- [208] S. Wojciechowski. *Superintegrability of the Calogero-Moser system*, Physics Letters A **95**: 279–281 (1983).
- [209] S. Wojciechowski. *On the solvability of the Calogero-Moser system in some external potentials and of other related hamiltonian systems*, Physics Letters A **104**: 189–192 (1984).
- [210] S. Wojciechowski. *An integrable marriage of the Euler equations with the Calogero-Moser system*, Physics Letters A **111**: 101–103 (1985).
- [211] J. Wolfes. *On the three-body linear problem with three-body interaction*, Journal of Mathematical Physics **15**: 1420–1424 (1974).
- [212] Y. Xian. *Rigorous results on a first-order phase transition in antiferromagnetic spin-1/2 coupled chains*, Physical Review B **52**: 12485–12488 (1995).
- [213] T. Xiang and N. D’ambumenil. *Energy-level ordering in the one-dimensional t - J model: A rigorous result*, Physical Review B **46**: 599–602 (1992).

- [214] T. Xiang and N. Dambrumenil. *Theorem on the one-dimensional interacting-electron system on a lattice*, Physical Review B **46**: 11179–11181 (1992).
- [215] C. N. Yang. *Concept of off-diagonal long-range order and the quantum phases of liquid he and of superconductors*, Reviews of Modern Physics **34**: 694–703 (1962).
- [216] C. N. Yang. *η pairing and off-diagonal long-range order in a Hubbard model*, Physical Review Letters **63**: 2144–2147 (1989).
- [217] C. N. Yang and C. P. Yang. *One-dimensional chain of anisotropic spin-spin interactions. I. Proof of Bethe’s hypothesis for ground state in a finite system*, Physical Review **150**: 321–327 (1966).
- [218] C. N. Yang and S. C. Zhang. *SO_4 symmetry in a Hubbard model*, Modern Physics Letters B **4**: 759–766 (1990).
- [219] F. C. Zhang and T. M. Rice. *Effective Hamiltonian for the superconducting Cu oxides*, Physical Review B **37**: 3759–3761 (1988).
- [220] N. Zhu, X. Wang, and C. Chen. *Low-energy properties of spin-1/2 two-leg antiferromagnetic Heisenberg ladders with ferromagnetic diagonal coupling*, Physical Review B **63**: 012401 (2000).